Solución: Una única manera para 2^{2012} ($2^{2012}=(2^{1005})^2+(2^{1005})^2+(2^{1005})^2+(2^{1005})^2$). Y 2^{2011} no se puede expresar como suma de 4 cuadrados.

En primer lugar voy a demostrar que si una potencia de 2 se descompone en suma de cuatro cuadrados, entonces la base de cada cuadrado tiene que ser número par. Es decir, si $2^N=a^2+b^2+c^2+d^2$ $(N>2)\rightarrow$ a, b, c y d son números pares.(Para N=2, $2^2=1^2+1^2+1^2+1^2$)

Como $a^2+b^2+c^2+d^2$ tiene que ser número par pueden darse tres posibilidades:

1) que los cuatro sumandos sean pares
2) que los cuatro sumandos sean impares
3) que dos sumandos sean impares y dos sumandos sean pares

Veo que las situaciones 2) y 3) no pueden darse:

2) que los cuatro sumandos a^2, b^2, c^2, d^2 sean impares

Si estas potencias son impares, las bases deben ser impares también, por lo que $a=2A–1$, $b=2B–1$, $c=2C–1$, $d=2D–1$.

$a^2+b^2+c^2+d^2=(2A–1)^2+(2B–1)^2+(2C–1)^2+(2D–1)^2=4(A^2+B^2+C^2+D^2) –4(A+B+C+D)+4$. Así que $2^N= 4(A^2+B^2+C^2+D^2) –4(A+B+C+D)+4$. Luego:

$2^{N–2}=(A^2+B^2+C^2+D^2) –(A+B+C+D)+1=A^2–A+ B^2–B + C^2–C + D^2–D+1=A(A–1)+B(B–1)+C(C–1)+D(D–1)+1$.

Pero los productos $A(A–1)$, $B(B–1)$, $C(C–1)$ y $D(D–1)$ son números pares por ser producto de dos números enteros consecutivos y por consiguiente se tiene que el número $A(A–1)+B(B–1)+C(C–1)+D(D–1)+1$ es impar, cosa que no puede ser ya que $A(A–1)+B(B–1)+C(C–1)+D(D–1)+1=2^{N–2}$.

3) que de los cuatro sumandos a^2, b^2, c^2, d^2 dos sean impares y dos sean pares(las dos bases correspondientes deben ser impares y pares)

Supongo $a=2A–1$, $b=2B–1$, $c=2C$, $d=2D$

$a^2+b^2+c^2+d^2=(2A–1)^2+(2B–1)^2+(2C)^2+(2D)^2=4(A^2+B^2+C^2+D^2) –4(A+B)+2$. Así que $2^N=4(A^2+B^2+C^2+D^2) –4(A+B)+2 \rightarrow 2^{N–1}=2(A^2+B^2+C^2+D^2) –2(A+B)+1$, cosa que no puede ser porque $2^{N–1}$ es par y $2(A^2+B^2+C^2+D^2) –2(A+B)+1$ es impar.

Inducción sobre el exponente para demostrar la unicidad y la imposibilidad en los casos de exponente par y exponente impar, respectivamente.

Si N es par la solución es única:

$N=2\rightarrow 2^2=1^2+1^2+1^2+1^2$ (única forma)
$N=4\rightarrow 2^4=2^2+2^2+2^2+2^2$ (única forma)

Supongamos que 2^{2N} se expresa de manera única como suma de cuatro cuadrados (esta forma será $2^{2N}=(2^{N-1})^2+ (2^{N-1})^2+ (2^{N-1})^2+(2^{N-1})^2$) y veamos que 2^{2N+2} también. $2^{2N+2}=a^2+b^2+c^2+d^2$, y como a, b, c, d son pares tenemos que $a=2A$, $b=2B$, $c=2C$, $d=2D$. Luego $2^{2N+2}=4(A^2+B^2+C^2+D^2)\rightarrow 2^{2N}= A^2+B^2+C^2+D^2$ y por la hipótesis de inducción esa descomposición es única, es decir, $A=B=C=D=2^{N-1}$, por lo que $a=b=c=d=2\times 2^{N-1}=2^N$.

Si N es impar no es posible:

$N=1\rightarrow 2^1=2$ (no es posible)
$N=3\rightarrow 2^3=8$ (no es posible)
Supongamos que 2^{2N-1} no se puede expresar como suma de 4 cuadrados y veamos que 2^{2N+1} tampoco se puede.
Si $2^{2N+1}=a^2+b^2+c^2+d^2$, tendríamos que $2^{2N+1}=4(A^2+B^2+C^2+D^2)\rightarrow 2^{2N-1}=A^2+B^2+C^2+D^2$ en contra de la hipótesis de inducción.