**Solución al desafío nº 19:** Una suma de cuadrados – Cuadrados que suman grandes cifras.
**Autor:** Javier Castellano

En primer lugar aclarar que considero que se pide expresar números como suma de cuatro cuadrados de números naturales 1, 2, 3, ... <u>sin incluir el 0</u>.

En ese caso la solución es que el número $2^{2012}$ **<u>admite una única descomposición como suma de cuatro cuadrados</u>** que es:

$$2^{2012}=(2^{1005})^2+(2^{1005})^2+(2^{1005})^2+(2^{1005})^2$$

Por otro lado el número $2^{2011}$ **<u>no admite ninguna descomposición como suma de cuatro cuadrados</u>**.

La demostración me ha quedado bastante larga, echando mano del procedimiento de inducción matemática.

Comenzamos por estudiar cómo se comportan las sucesivas potencias de 2:
2 – No puede expresarse como suma de cuatro cuadrados.
4=1+1+1+1 – Única descomposición.
8 – No puede expresarse como suma de cuatro cuadrados.
16=4+4+4+4 – Única descomposición.
32 – No puede expresarse como suma de cuatro cuadrados.

Vemos que surge claramente una pauta, y es que las potencias impares de 2 ( $2^1, 2^3$ ...) no pueden expresarse como suma de cuatro cuadrados y las pares sí ( $2^2, 2^4$ ...) pero de una única forma. Tratemos de demostrar esto.

<u>*Caso 1. Potencias pares de 2.</u>
Asumimos como hipótesis que el número $2^{2n}$ puede expresarse de una única forma como suma de cuatro cuadrados, siendo ésta:

$$2^{2n}=2^{2(n-1)}+2^{2(n-1)}+2^{2(n-1)}+2^{2(n-1)}$$

Supongamos ahora que el número $2^{2(n+1)}$ admite al menos dos descomposiciones distintas en suma de cuatro cuadrados, siendo éstas:

$$2^{2(n+1)}=2^{2n}+2^{2n}+2^{2n}+2^{2n}$$
$$2^{2(n+1)}=a^2+b^2+c^2+d^2$$

De aquí tenemos que:

$$2^{2n}+2^{2n}+2^{2n}+2^{2n}=a^2+b^2+c^2+d^2$$
$$4\cdot 2^{2n}=a^2+b^2+c^2+d^2$$

De aquí se deduce que la suma de cuadrados de a, b, c y d ha de ser múltiplo de 4, situación que sólo puede darse si a, b, c y d son todos pares o todos impares a la vez (un número par al cuadrado es siempre múltiplo de 4, y un número impar al cuadrado resulta un múltiplo de cuatro más 1).

<u>Si a, b, c y d son todos pares a la vez,</u> entones podemos hacer:
$$4\cdot 2^{2n}=a^2+b^2+c^2+d^2$$
$$2^{2n}=a^2/4+b^2/4+c^2/4+d^2/4$$

$$2^{2n}=(a/2)^2+(b/2)^2+(c/2)^2+(d/2)^2$$

Dado que a, b, c y d son pares, los cocientes a/2, b/2, c/2 y d/2 son enteros, y esto significaría que habríamos encontrado una descomposición en suma de cuatro cuadrados para $2^{2n}$. Pero por hipótesis esa descomposición es única, y ha de tenerse necesariamente que:

$$a/2=b/2=c/2=d/2=2^{(n-1)}$$
$$a=b=c=d=2^n$$

Lo que da para $2^{2(n+1)}$ la descomposición "canónica" $2^{2(n+1)}=2^{2n}+2^{2n}+2^{2n}+2^{2n}$

<u>Si a,b, c y d son todos impares a la vez</u>, entonces podemos escribir:
a=2A+1, b=2B+1, c=2C+1, d=2D+1

Donde A, B, C y D son números naturales (o quizá 0). Por tanto, igualando las dos posibles descomposiciones en suma de cuadrados para $2^{2(n+1)}$ :

$$2^{2n}+2^{2n}+2^{2n}+2^{2n}=(2A+1)^2+(2B+1)^2+(2C+1)^2+(2D+1)^2$$
$$4\cdot 2^{2n}=4A^2+4A+1+4B^2+4B+1+4C^2+4C+1+4D^2+4D+1$$
$$4\cdot 2^{2n}=4A^2+4B^2+4C^2+4D^2+4(A+B+C+D)+4$$
$$2^{2n}=A^2+B^2+C^2+D^2+A+B+C+D+1$$
$$2^{2n}=A(A+1)+B(B+1)+C(C+1)+D(D+1)+1$$

Ahora bien, las expresiones A(A+1), B(B+1),C(C+1) y D(D+1) son siempre pares, sea cual sea la paridad de A,B,C o D por tanto su suma es un número par, y sumándole 1 obtendríamos impar, llegando a la conclusión absurda: $2^{2n}$ = impar

De modo que, por reducción al absurdo, concluimos que a, b, c y d no pueden ser todos impares a la vez, quedando $2^{2(n+1)}$ con una única descomposición.

Por tanto dado que $2^2$ =4 admite una única descomposición como suma de cuatro cuadrados deducimos, por inducción matemática, que todas las potencias pares de 2 admiten una única descomposición como suma de cuatro cuadrados.
En particular: $2^{2012}=2^{2010}+2^{2010}+2^{2010}+2^{2010}$

<u>*Caso 2. Potencias impares de 2.</u>
Procedemos de nuevo por inducción asumiendo, como hipótesis, que $2^{(2n+1)}$ no admite ninguna descomposición en suma de cuatro cuadrados.

Supongamos ahora que la siguiente potencia impar $2^{(2n+3)}$ sí puede expresarse como suma de cuatro cuadrados de al menos una forma, siendo ésta:

$$2^{(2n+3)}=a^2+b^2+c^2+d^2$$
$$4\cdot 2^{(2n+1)}=a^2+b^2+c^2+d^2$$

Como en el caso 1, esto implica que la suma de los cuadrados de a, b, c y d ha de ser múltiplo de 4, lo que, de nuevo, nos lleva a que son todos pares o impares a la vez.

<u>Si a, b, c y d son todos pares</u> entonces podríamos simplificar esta expresión como en el Caso 1:

$$4\cdot 2^{(2n+1)}=a^2+b^2+c^2+d^2$$
$$2^{(2n+1)}=(a/2)^2+(b/2)^2+(c/2)^2+(d/2)^2$$

Pero esto significaría, contrariamente a la hipótesis, que existe una descomposición en suma de cuadrados para $2^{(2n+1)}$ . Luego, por reducción al absurdo, deducimos que a, b, c y d no pueden ser todos pares a la vez.

Si a, b, c y d son todos impares procedemos de nuevo como en el Caso 1. Escribiendo a, b, c y d como a=2A+1, b=2B+1, c=2C+1 y d=2D+1 y obteniendo:

$$2^{(2n+3)} = (2A+1)^2 + (2B+1)^2 + (2C+1)^2 + (2D+1)^2$$
$$4 \cdot 2^{(2n+1)} = 4A^2 + 4A + 1 + 4B^2 + 4B + 1 + 4C^2 + 4C + 1 + 4D^2 + 4D + 1$$
$$4 \cdot 2^{(2n+1)} = 4A^2 + 4B^2 + 4C^2 + 4D^2 + 4(A+B+C+D) + 4$$
$$2^{(2n+1)} = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + A + B + C + D + 1$$
$$2^{(2n+1)} = A(A+1) + B(B+1) + C(C+1) + D(D+1) + 1$$

Situación de nuevo imposible ya que obligaría a que una potencia de 2 arrojase un resultado impar. De nuevo, por reducción al absurdo, deducimos que a, b, c y d no pueden ser todos impares a la vez.

Pero si a, b, c y d han de ser pares o impares y hemos demostrado que no pueden ser ni lo uno ni lo otro, sólo queda deducir que no existen tales a, b, c y d y, por ende, que $2^{(2n+3)}$ no puede descomponerse en suma de cuatro cuadrados.

Así, finalmente, dado que $2^3 = 8$ no admite descomposición como suma de cuatro cuadrados hemos probado, por inducción matemática, que ninguna potencia impar de 2 admite dicha descomposición. En particular $2^{2011}$ no puede descomponerse como suma de cuatro cuadrados.