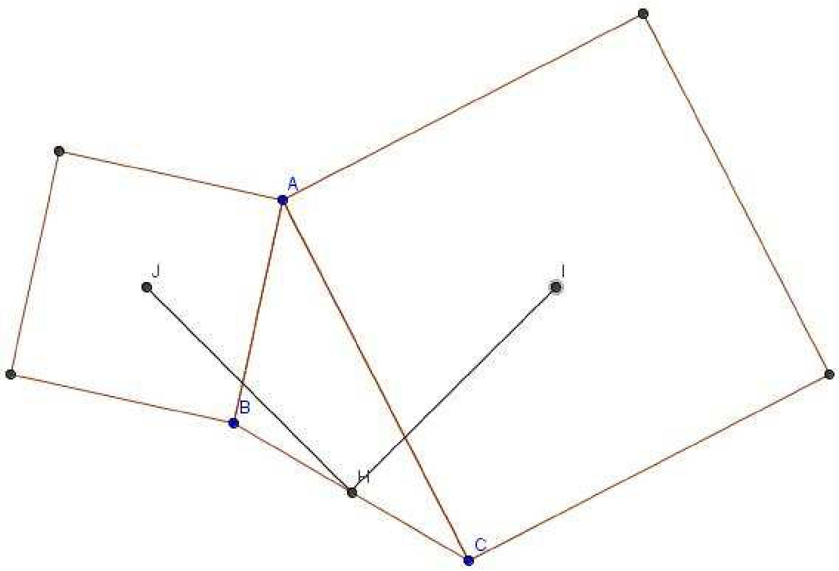
Desafío 39:

Partiendo de un triángulo cualquiera de vértices ABC, tomamos dos de sus lados, AB y AC por ejemplo, y dibujamos cuadrados apoyados en ellos. Llamamos I y J a los centros de los dos cuadrados y H al punto medio del lado del triángulo donde no hemos apoyado ningún cuadrado (el BC en este caso).

El desafío de esta semana consiste en demostrar que los segmentos HI y HJ tienen la misma longitud y que además forman un ángulo de 90º.



Solución y notas de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo:

Asignémosle a los vértices dados en sentido antihorario $A,$ B y C del triángulo, a los centros I y J de los cuadrados construidos sobre los lados AB y CA y al punto medio H del lado BC los números complejos $a,$ $b,$ $c,$ $k,$ j y $h,$ respectivamente.

Al ser H el punto medio de $BC,$ el vector (libre) $\overrightarrow{BH}$, representado por el número complejo $h-b,$ coincide con el $\overrightarrow{HC},$ representado por el número complejo $c-h,$ luego $h-b=c-h,$ es decir, $h=\dfrac{b+c}{2}.$

Por ser I el centro del cuadrado construido sobre el lado $AB,$ resulta que los segmentos IA e IC tienen la misma longitud (la mitad de la de la diagonal de dicho cuadrado) y forman un ángulo recto (el mismo que el que forman las diagonales del citado cuadrado), es decir, el vector $\overrightarrow{IC},$ representado por el número complejo $c-k,$ se obtiene girando un ángulo recto en sentido antihorario el vector $\overrightarrow{IA}$, representado por el número complejo $a-k$, luego $c-k=i(a-k)$, es decir, $k=\frac{c-ia}{1-i}=\frac{(c-ia)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{c+ic-ia+a}{1^2-i^2}=\frac{c+a}{2}+i\frac{c-a}{2}$.

Análogamente, como el vector $\overrightarrow{JA}$ se obtiene girando un ángulo recto en sentido antihorario el vector $\overrightarrow{JB}$, se deduce que $j=\frac{a+b}{2}+i\frac{a-b}{2}$.

En consecuencia,

$$j-h=\frac{a+b}{2}+i\frac{a-b}{2}-\frac{b+c}{2}=\frac{a-c}{2}+i\frac{a-b}{2}=i\left(\frac{a-b}{2}+i\frac{c-a}{2}\right)=i\left(\frac{c+a}{2}+i\frac{c-a}{2}-\frac{b+c}{2}\right)=i(k-h),$$

lo que demuestra que el vector $\overrightarrow{HJ}$ se obtiene girando el vector $\overrightarrow{HI}$ un ángulo recto en sentido antihorario, o equivalentemente, que los segmentos HI y HJ tienen la misma longitud y además forman un ángulo de 90°.

<u>Notas</u>: Este problema no es nuevo: Aparece, por ejemplo, enunciado y resuelto, probándose, además (adaptando la notación) que si los cuadrados construidos son $ABDE$ y $ACFG$ y L es el punto medio del segmento EG, entonces el cuadrilátero $HILJ$ es un cuadrado, en el libro *Problem-solving strategies*, de Arthur Engel, publicado por la editorial Springer-Verlag en el año 1998.

Existen más formas de abordarlo que la aquí descrita: Véanse, por ejemplo, las soluciones, notas y referencias de un problema similar: El A104 (propuesto en el número 30 y) resuelto en el número 31 de la revista SCM/Notícies, disponibles en la dirección

http://www.iecat.net/institucio/societats/scmatematiques/publicacions/noticies/N31.pdf