EL DESAFÍO DE LA SEMANA. Dos segmentos iguales y en ángulo recto.

Partiendo de un triángulo cualquiera de vértices ABC, tomamos dos de sus lados, AB y AC por ejemplo, y dibujamos cuadrados apoyados en ellos. Llamamos I y J a los centros de los dos cuadrados y H al punto medio del lado del triángulo donde no hemos apoyado ningún cuadrado (el BC en este caso).

El desafío de esta semana consiste en demostrar que los segmentos HI y HJ tienen la misma longitud y que además forman un ángulo de 90º. La situación inicial puede verse en esta figura.

SOLUCIÓN 1.

Vamos a ver las coordenadas de todos los puntos. Tomamos el origen en el punto B, y el eje OY con el lado AB, y el triángulo hacia la derecha del eje OY.

A = (0 , c) ; B = (0 , 0) ; C = (x , y) , con x > 0

H = (x/2 , y/2) ; J = (-c /2 , c/2) ;

AC = (x , y - c)

M punto medio de AC , M = (x/2 , (c + y)/2)

Recordamos que para hallar un vector perpendicular a (X,Y) basta cambiar el orden y un signo, es decir el (-Y,X) es perpendicular al (X,Y). Realmente hay 2 vectores que sean perpendiculares al (X,Y) y tengan el mismo módulo: el (-Y,X) y el (Y,-X) (misma dirección, sentido contrario).

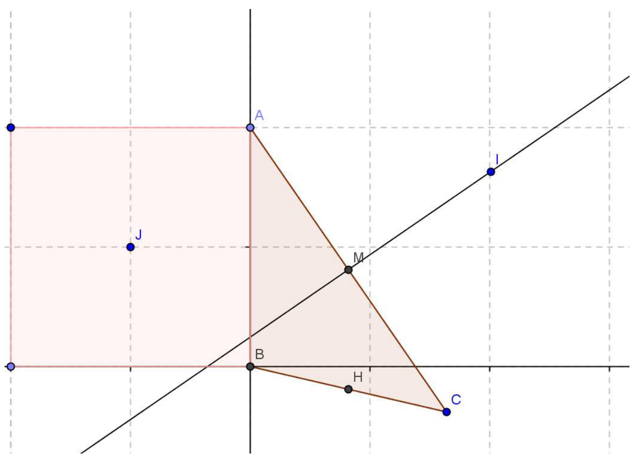
MI es un vector perpendicular a AC y de módulo la mitad, así que MI = 1/2 (c - y , x) . (El otro vector perpendicular sería el 1/2 (y - c , -x) que apunta hacia dentro del triángulo, -x < 0).

I = OI = OM + MI = (x/2 , (c + y)/2) + 1/2 (c - y , x) = ((x+c-y)/2 , (x+c+y)/2)

HI = ((c-y)/2 , (x+c)/2) = **1/2 (c-y , c+x)**

HJ = ((-c-x)/2 , (c-y)/2) = 1/2 (-c-x , c-y) **= 1/2 (-(c+x) , c-y)**

Así que HI y HJ son perpendiculares y tienen el mismo módulo.



SOLUCIÓN 2.

Dos triángulos semejantes tienen los 3 ángulos iguales y los 3 lados proporcionales.

Para ver esta solución lo que hay que recordar es que si 2 triángulos tienen 2 lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual, entonces son 2 triángulos semejantes.

Los triángulos HCI y BCR son semejantes.

- Comparten el ángulo (C+45°)
- BC = 2 * HC   (porque H es el punto medio de BC)
- CR = 2 * CI   (=diagonal cuadrado CARS)

y por lo tanto el otro lado del triángulo grande también será el doble del otro lado del triángulo pequeño, y serán lados paralelos, es decir **BR = 2 * HI**

Los triángulos HBJ y CBP son semejantes.

- Comparten el ángulo (B+45°)
- BC = 2 * BH   (porque H es el punto medio de BC)
- BP = 2 * BJ   (=diagonal cuadrado BQPA)

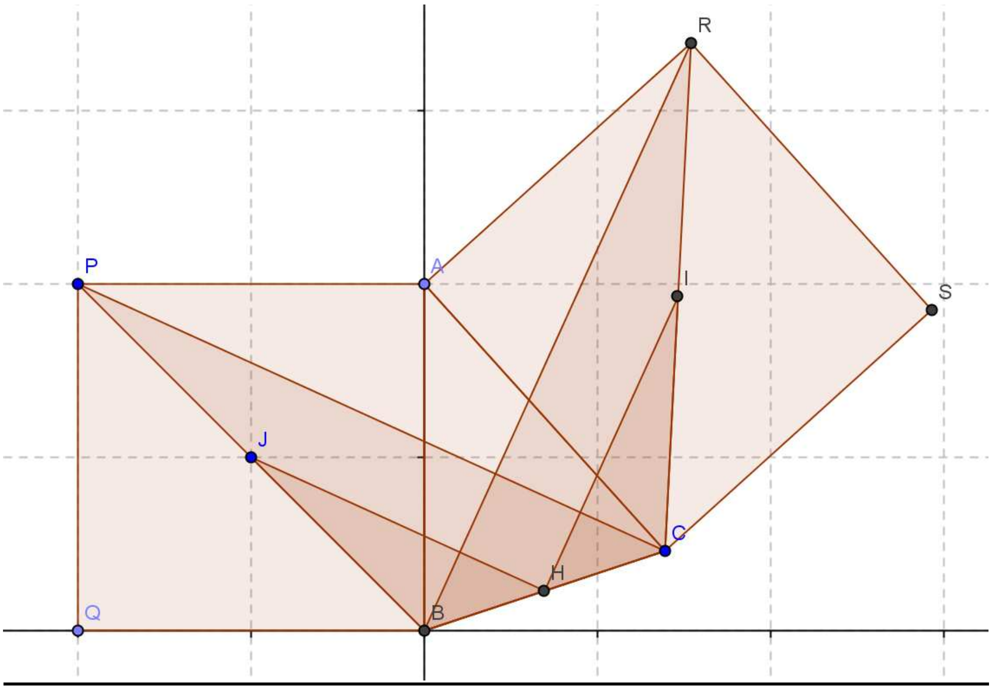
y por lo tanto el otro lado de este triángulo grande también será el doble del otro lado de este triángulo pequeño, y serán lados paralelos, es decir **CP = 2 * HJ**

Así que si vemos que **CP** y **BR** miden lo mismo y son perpendiculares, ya tendremos lo que queríamos, que HI y HJ miden lo mismo (la mitad que CP=BR) y también son perpendiculares (porque HJ paralelo a CP , CP perpendicular a BR , BR paralelo a HI).

El triángulo BAR tiene 2 lados que coinciden con lados de los cuadrados (BA es lado del cuadrado de la izquierda en el dibujo, AR es lado del cuadrado de la derecha), y el ángulo que forman estos dos lados es (A + 90°). (donde A es el ángulo del vértice A del triángulo original)

El triángulo PAC tiene 2 lados que coinciden con lados de los cuadrados (PA es lado del cuadrado de la izquierda en el dibujo, AC es lado del cuadrado de la derecha), y el ángulo que forman estos dos lados es (A + 90°).

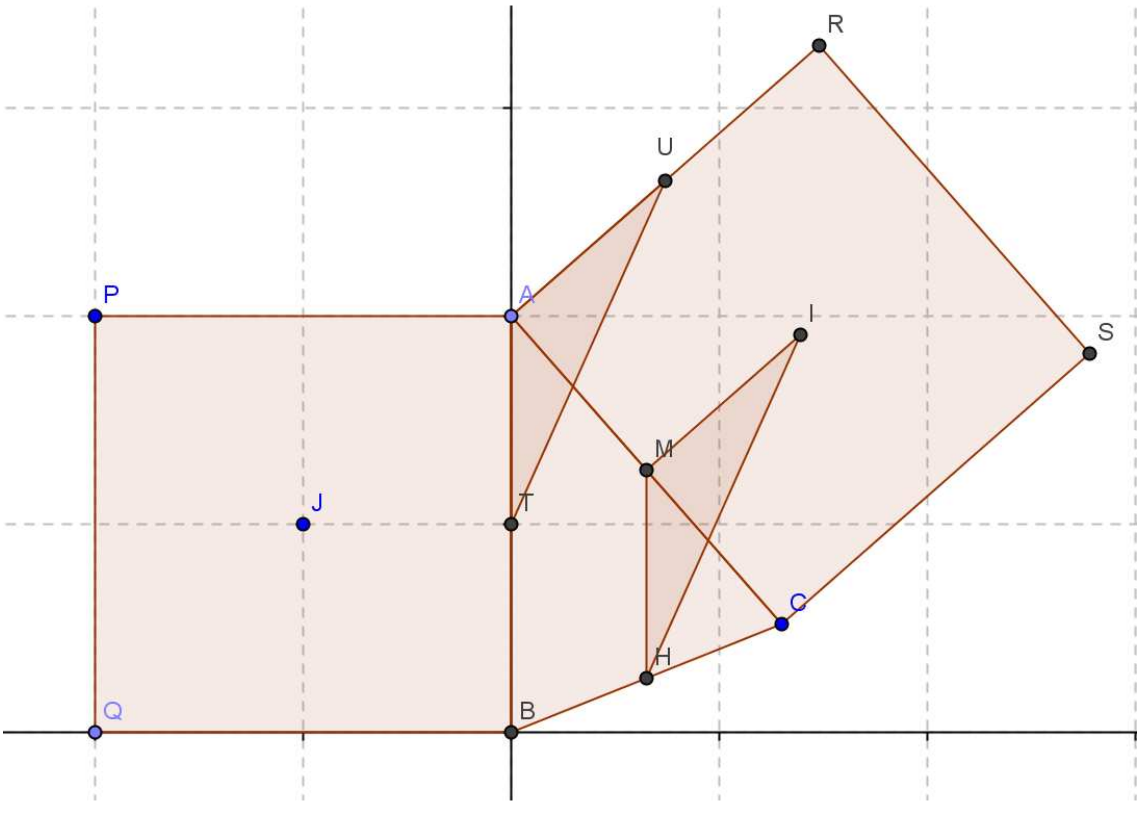
Así que ambos triángulos, BAR y PAC, han de ser iguales (2 lados iguales y el ángulo comprendido entre ellos igual). Y por tanto |CP| = |BR|. Y son perpendiculares porque los otros 2 lados son perpendiculares (AR perpendicular a AC y AB perpendicular a AP). En el dibujo rotando el triángulo BAR en el punto A, 90° en sentido agujas del reloj, coincidirá con el otro triángulo PAC.



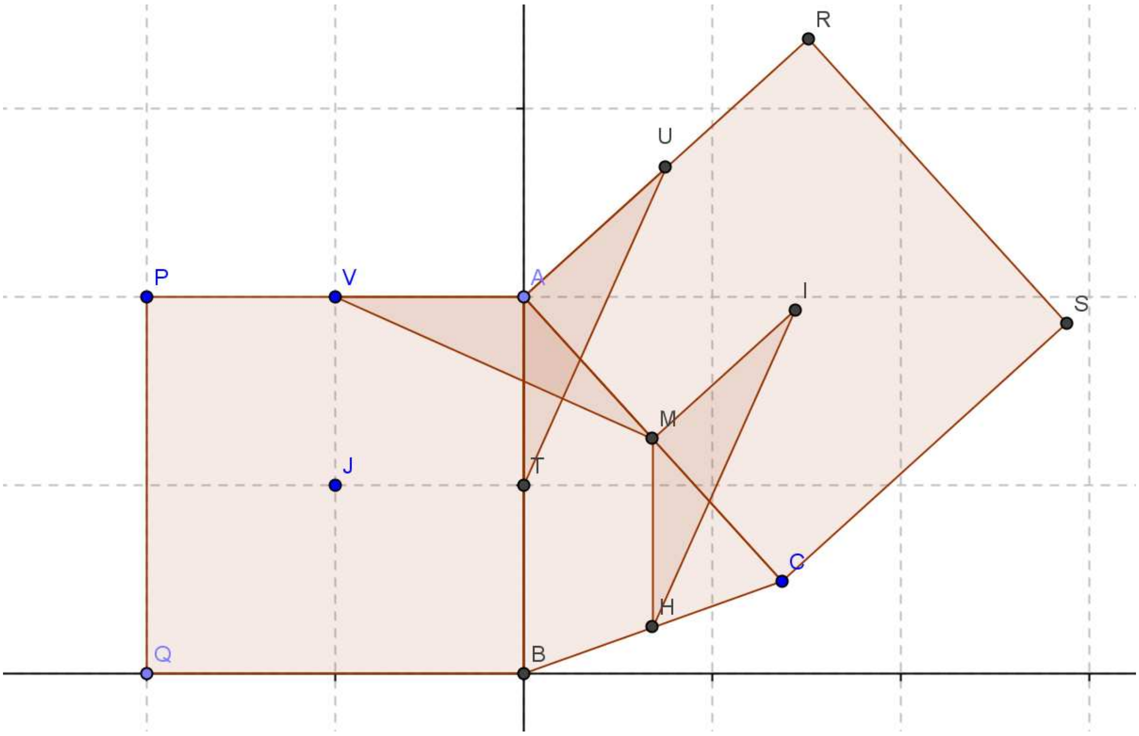
SOLUCIÓN 3.

Trasladar, rodar, y trasladar.

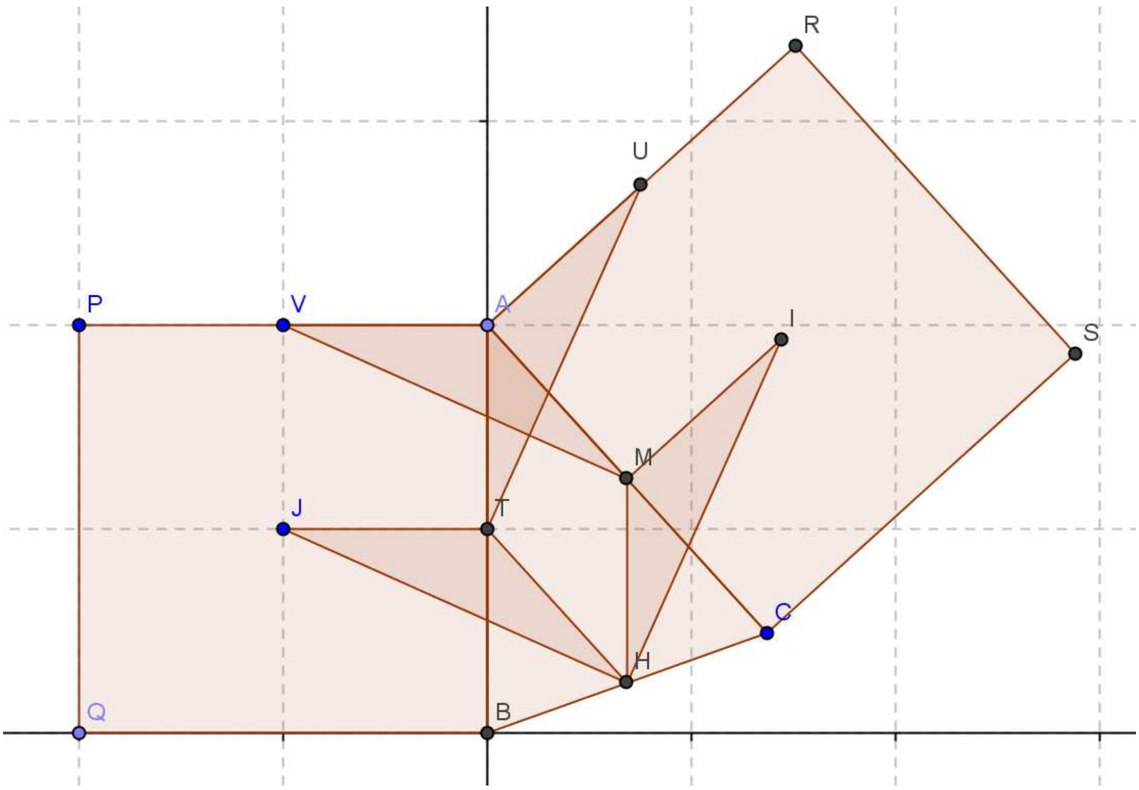
El triángulo HMI lo trasladamos por el lado AC y llegamos al TAU.



Y ahora lo giramos 90° en sentido agujas del reloj (U pasa a M, T pasa a V)



Y ahora hacia abajo… (V a J, A a T, M a H)



Hemos pasado de **HI** a **HJ**, trasladando, girando 90°, y trasladando.

Así que **HI** y **HJ** son iguales y perpendiculares.

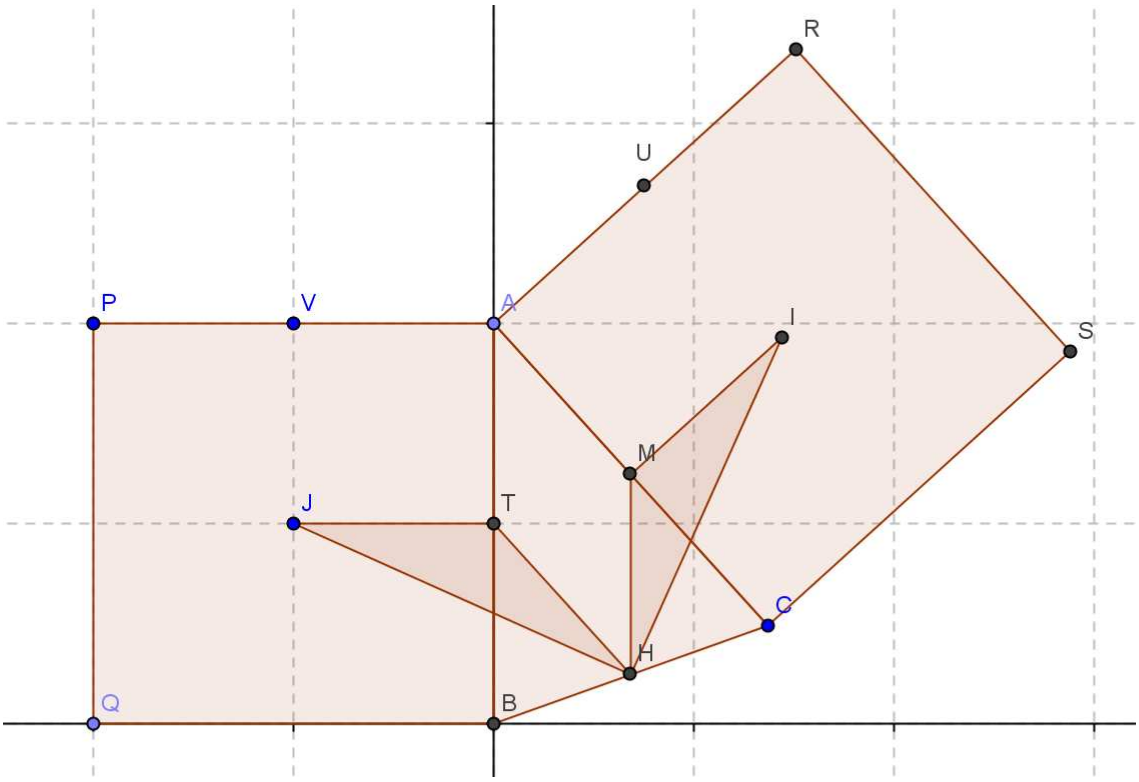
<u>SOLUCIÓN 4.</u> Ver directamente que los triángulos **HMI** y **JTH** son iguales.

Recordamos que el cualquier triángulo **el segmento que une los puntos medios de 2 lados es paralelo al otro lado y mide la mitad del mismo**. Esto se deduce por ejemplo del criterio de semejanza que hemos usado en la solución 2 (“*si 2 triángulos tienen 2 lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual, entonces son 2 triángulos semejantes*”).

Llamamos a los lados del triángulo “a”, “b” y “c”. (a=medida lado opuesto al vértice A, b lado opuesto al B y c lado opuesto al C).

En el Triángulo **HMI**, el ángulo del vértice M es (A+90°), y los lados que forman este ángulo miden |MI| = b/2 y |HM| = c/2 (porque HM es el segmento que une los puntos medios de los lados “a” y “b”).

En el Triángulo **JTH**, el ángulo del vértice T es (A+90°), y los lados que forman este ángulo miden |JT| = c/2 y |TH| = b/2 (porque TH es el segmento que une los puntos medios de los lados “c” y “a”).



Así que los 2 triángulos son iguales, porque tienen 2 lados iguales y el ángulo comprendido entre esos dos lados también igual. Por tanto el tercer lado también ha de ser igual, es decir **|HI| = |HJ|**. Y son perpendiculares por serlo los otros 2 lados:

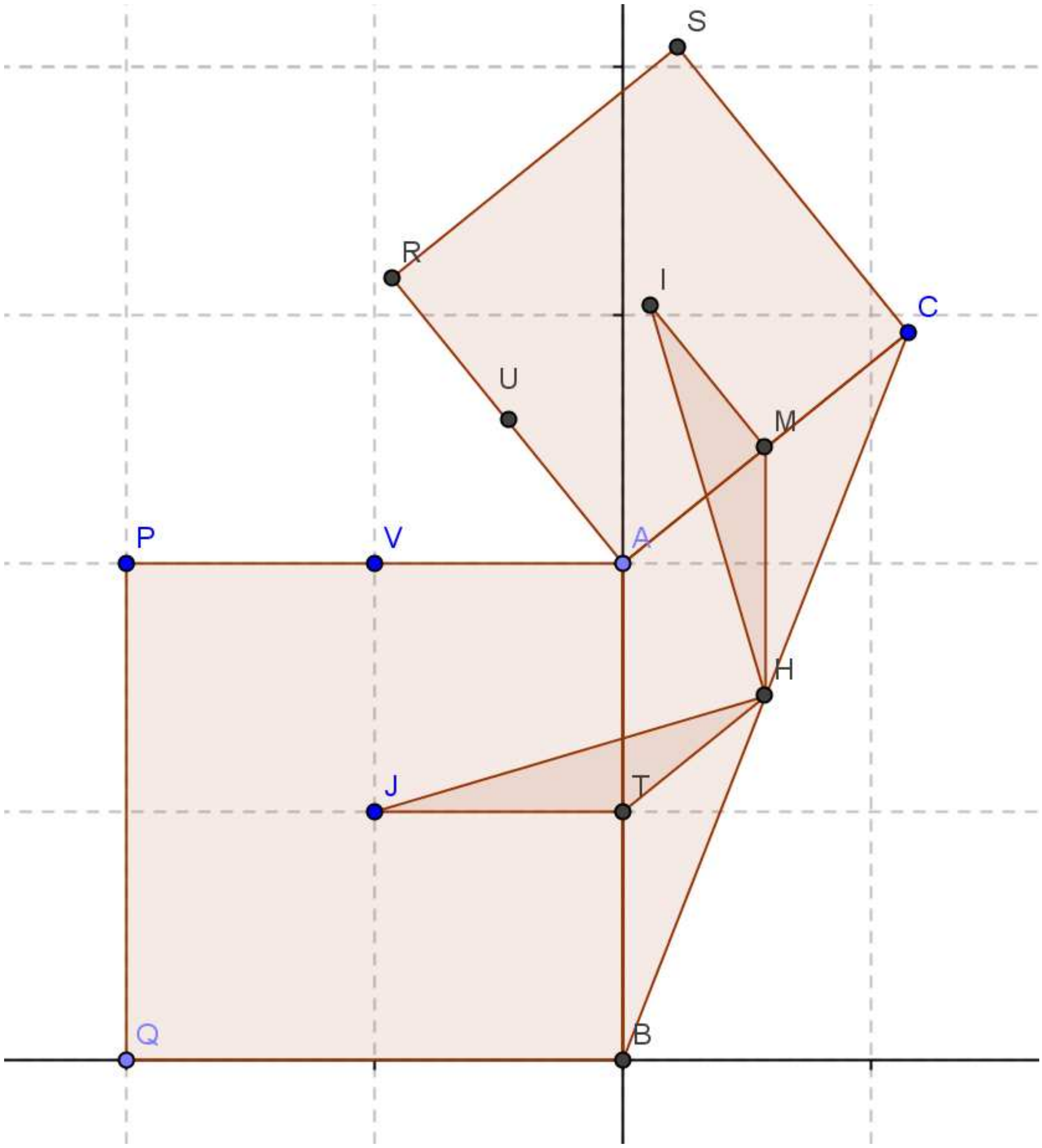
MH paralelo a AB y AB perpendicular a JT => MH perpendicular a JT.

MI perpendicular a AC y AC paralelo a TH => MI perpendicular a TH

Y girando 90° el triángulo HMI en sentido agujas reloj nos queda el JTH.

Nota: en los dibujos siempre hemos pintado el ángulo A menor que 90°. Si fuera mayor que 90° puede cambiar un poco el razonamiento.

Por ejemplo, en la Solución 4, el ángulo coincidente de ambos triángulos en lugar de ser (A+90°) es (360 - (A+90°)), como se puede observar en el siguiente dibujo. Todo lo demás sirve igual.



Otro dibujo, para seguir jugando: