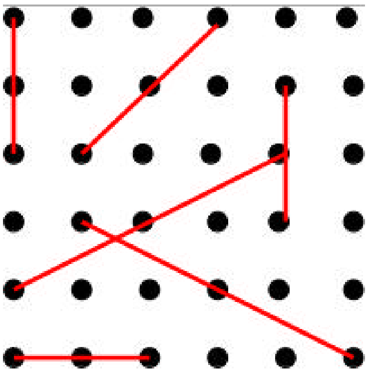
SEGMENTOS EN RED QUE SON MÚLTIPLOS DE OCHO

Tenemos una red de puntos distribuidos en los vertices de una cuadricula en un plano. Estos forman un cuadrado con N puntos en cada lado (ver figura para N=6).

Para N=3 vemos que existen 8 segmentos de linea recta que contienen y quedan delimitados por 3 puntos de la red (los segmentos corresponden a los 4 lados, las 2 diagonales y las 2 que dividen al cuadrado en 2 rectangulos iguales).

El problema consiste en demostrar que para cualquier N>2 el numero de diferentes segmentos de linea recta que contienen y quedan delimitados por 3 puntos de la red es multiplo de 8.



Aclaraciones sobre el enunciado.

Visto lo que se comenta en el blog de Santi, entiendo que solo deben contabilizarse aquellos segmentos sobre los que se encuentren únicamente tres vértices. Por ejemplo, en un cuadrado de 5x5 vértices, la diagonal completa no cuenta como segmento válido, porque pasa por cinco vértices. Sin embargo, sobre esa recta si habría tres segmentos válidos solapados parcialmente.

Parte 1: Calcular nuevos segmentos horizontales y verticales.

Establezcamos un sistema de coordenadas que usaremos en toda la demostración. La primera coordenada X será la columna y la segunda Y será la fila. Empezaremos a contar en la esquina superior izquierda. Por tanto, en un cuadrado de NxN vértices la esquina superior izquierda tendrá coordenadas (1,1), la superior derecha (N,1), la inferior izquierda (1,N) y la inferior derecha (N,N).

Supongamos un cuadrado de NxN puntos para el que ya están contabilizados todos los segmentos diferentes que contienen y delimitados por tres puntos, con las restricciones indicadas en la aclaración del enunciado. Añadimos una fila y una columna y calculamos el número de segmentos en el cuadrado de (N+1xN+1) puntos.

Para ello, solo tendremos sumar a los que ya existían en el cuadrado de NxN los que aportan las nuevas fila y columna. Es decir, tenemos que contabilizar los segmentos que incluyen al menos un vértice de la nueva fila o de la nueva columna.

Primero, contamos los segmentos horizontales cuyos tres puntos están incluidos en la nueva fila. Puesto que esta fila tiene N+1 puntos, cabrá dibujar en ella N-1 segmentos. El primero sería el que del vértice (1,N+1) al vértice (3,N+1). El último irá del vértice (N-1,N+1) al vértice (N+1,N+1).

Por simetría, habrá también N-1 segmentos incluidos íntegramente en la nueva columna. Nuestro recuento de nuevos segmentos horizontales y verticales incorporados al aumentar una fila y una columna es el siguiente:

Nuevos Segmentos = 2*(N-1)

A continuación, contaremos los segmentos horizontales que, sin estar íntegramente en la nueva fila, tengan un vértice en la nueva columna. Habrá N segmentos de este tipo, cada uno de ellos terminando en el vértice de coordenadas (N+1,X), con X variando de 1 a N. Aunque la nueva columna tiene N+1 puntos, el segmento horizontal que termina en el vértice (N+1,N+1) está íntegramente contenido en la última fila, y por tanto ya lo habíamos contado anteriormente.

Por simetría, habrá también N segmentos verticales que, sin estar íntegramente contenidos en la nueva columna, tengan un vértice en la nueva fila. Por tanto, el recuento será:

Nuevos Segmentos Horizontales o Verticales = 2*(N-1) + 2*N = 4*N-2

Parte 2: Calcular nuevos segmentos en diagonales de 45 grados.

Ahora contamos los segmentos en diagonales de 45 grados que tiene algún vértice en la nueva fila o columna. Puesto que hemos asumido que solo contaremos segmentos que pasen por tres vértices, estos segmentos diagonales tienen que tener una diferencia de dos unidades entre las coordenadas de sus extremos.

Empezamos por los que están en la dirección decreciente (de arriba a la izquierda hacia abajo a la derecha). En estos, cada coordenadas de un extremo es dos unidades mayor que la correspondiente del otro extremo. Tenemos N-1 segmentos de este tipo que terminan en la última columna: el primero es el que une el vértice (N-1,1) con el (N+1,3), mientras que el último será el que une el vértice (N-1,N-1) con el (N+1,N+1). Por simetría, tenemos otros N-1 segmentos que terminan en la última fila. Pero cuidado, el último de cada uno de las dos series es el mismo: el que une el vértice (N-1,N-1) con el (N+1,N+1). Por tanto, nuestro recuento se tiene que incrementar en 2*(N-1)-1 segmentos. Los sumamos a los que habíamos contado horizontales o verticales.

Nuevos Segmentos = 4*N-2 + 2*(N-1) –1 = 6*N - 5

Ahora contamos los segmentos en diagonales de 45 grados, pero en la dirección creciente (de abajo a la izquierda hacia arriba a la derecha). Tenemos N-1 segmentos de este tipo que terminan en la última columna: el primero es el que une el vértice (N-1,3) con el (N+1,1), mientras que el último será el que une el vértice (N-1,N+1) con el (N+1,N-1). Por simetría, tenemos otros N-1 segmentos que terminan en la última fila. Pero atención de nuevo, el último de cada serie vuelve a repetirse: el que une el vértice (N-1,N+1) con el (N+1,N-1)). Por tanto, nuestro recuento se tiene que incrementar otra vez en 2*(N-1)-1 segmentos

$$\text{Nuevos Segmentos} = 6*N - 5 + 2*(N-1) - 1 = 8*N - 8$$

Parte 3: Resultado parcial para segmentos horizontales, verticales o a 45 grados.

Parémonos un momento aquí. Hemos contabilizado los nuevos segmentos que aparecen al agregar una fila y columna, restringidos a los horizontales, verticales o diagonales de 45 (o –45) grados. Llamando S(n) a los segmentos de este tipo contenidos en un cuadrado de NxN, hemos llegado a que:

$$S(n+1) = S(n) + 8*N - 8$$

Lo cual evidencia lo que se quería demostrar. Si S(n) es múltiplo de 8, y dado que 8*N-8 también es múltiplo de 8, S(n+1) tiene que ser múltiplo de 8. Puesto que S(3)=8, por inducción se deduce que S(n) es múltiplo de 8 para todo n>=3.

Se puede demostrar, también por inducción, que esto conduce a la siguiente fórmula general:

$$S(n) = 4*n^2 - 12*n + 8$$

Lástima que este es un resultado parcial. No estamos considerando segmentos con otras inclinaciones. Vamos a ello.

Parte 4: Descartando obtener la fórmula general al considerar segmentos con otras inclinaciones.

Empecemos por los segmentos que tienen dos vértices contiguos separados a un salto de caballo de ajedrez, es decir, 2 filas y 1 columna o viceversa. Ciertamente, se puede realizar el cálculo de cuantos segmentos de este tipo caben en un cuadrado de N+1 x N+1 vértices, que no estuvieran incluidos en el cuadrado de NxN. Pero antes de hacerlo, veamos cual sería el siguiente paso. Tendríamos que probar otras inclinaciones, por ejemplo los separados 3 filas y 4 columnas o viceversa. Si queremos generalizarlo, habría que considerar todos los segmentos cuyos vértices contiguos estén separados por A filas y B columnas o viceversa. Tendremos que restringir que, por ejemplo, A sea siempre menor que B, porque en otro caso estaríamos contando dos veces el mismo segmento.

Con mucho esfuerzo, podríamos calcular, para un determinado N, todas las inclinaciones posibles. Estas vendrían dadas por las posibles combinaciones de A y B. Tendríamos que realizar un recuento de los nuevos segmentos con cada combinación, y encontrar una fórmula para totalizarlas. Por ejemplo, para N=100, las combinaciones de A y B posibles, llegarían hasta B=50. De este modo, cabría por ejemplo un segmento con un vértice en la fila 1, otro en la 51 y otro en la 101, (recordemos que pretendemos contabilizar los nuevos segmentos que aparecen al añadir al cuadrado de 100x100 una fila y columna). Esto daría lugar a una tabla de este estilo, donde cada celda estaría destinada a alojar el número de segmentos con al menos un vértice en la nueva fila o columna, con una inclinación tal que dos vértices contiguos estén separados A filas y B columnas o viceversa. Las celdas con guiones indican que esa combinación no hay que contarla porque implica que A>B, y los segmentos para ese caso ya estarían contados en la celda en que se intercambian los valores de A y B. Las celdas con interrogaciones son los datos que deberíamos averiguar.

		B						
		50	49	48	...	4	3	2
	1	¿?	¿?	¿?		¿?	¿?	¿?
	2	¿?	¿?	¿?		¿?	¿?	-
A	...							
	47	¿?	¿?	¿?		-	-	-
	48	¿?	¿?	-		-	-	-
	49	¿?	-	-		-	-	-

Si pudiéramos completar una tabla de este estilo, para N=100, tendríamos que sumar los valores de todas las celdas para averiguar el número de segmentos de un cuadrado de 101x101 que no estuvieran en el cuadrado de 100x100. Lo difícil sería generalizar esto. Es decir, para cualquier N, obtener una fórmula de los segmentos dados por una combinación de A y B y otra más compleja aún que totalice las combinaciones de A y B.

Tengo la intuición de que esto no sería imposible para un matemático. Sin embargo, en ese recuento estamos incluyendo combinaciones inválidas. Por ejemplo, A=2, B=4, implica contar los segmentos que conectan vértices que estén separados esas cantidades, por ejemplo los de coordenadas (1,1), (3,5) y (5,9). Pero ese segmento pasa por otros dos puntos: el (2,3) y el (4,7). Por tanto, esa combinación A=2, B=4 no deberíamos tenerla en cuenta. Para hacer el recuento bien, tendríamos que excluir de la tabla anterior las combinaciones de A y B que no constituyen una pareja de primos entre si, y conseguir una fórmula general que nos de los nuevos segmentos para un N cualquiera que no incluya estas combinaciones. Creo intuir que esto debe ser un problema del calibre de hallar una fórmula para generar números primos.

Así que descartaremos el ambicioso objetivo de obtener una fórmula general de los segmentos contenidos en un cuadrado de NxN y nos limitaremos al objeto del desafío: demostrar que son múltiplos de 8.

Parte 5: Demostrar que los segmentos son múltiplo de 4.

Para ello, consideremos una determinada combinación de A y B que sea válida (es decir, primos entre si, y con A<B). Tenemos otras restricciones, como que 2*B+1 sea menor o igual que N, pero pongamos el caso de que estemos en una combinación válida que general al menos un segmento con al menos un vértice en la nueva fila o columna.

Contemos cuantos segmentos con la inclinación definida por A y B caben en nuestro cuadrado de N+1 x N+1, que no estuvieran incluidos en el de NxN.

Empecemos por los segmentos donde la coordenada de la columna (la primera), se reduce en A unidades y la de la fila se incrementa en B. De estos, empecemos por los que tienen un vértice en la última columna,. El primero de estos será el que tiene un vértice en la esquina superior derecha del cuadrado, y el último el que tiene un vértice en la última fila. Es decir, los que tienen los vértices de las siguientes coordenadas:

1er vértice	2º vértice	3er vértice
(N+1,1)	(N+1-A,1+B)	(N+1-2*A,1+2*B)
(N+1,2)	(N+1-A,2+B)	(N+1-2*A,2+2*B)
...		
(N+1,J)	(N+1-A,J+B)	(N+1-2*A,J+2*B)

Para que esta tabla esté completa, el último segmento tiene que estar en la última fila, lo que nos lleva a:

$$J = N+1 - 2*B$$

Ahora contamos los que tienen un vértice en la última fila.

1er vértice	2º vértice	3er vértice
(1+2*A,N+1-2*B)	(1+A,N+1-B)	(1,N+1)
(2+2*A,N+1-2*B)	(2+A,N+1-B)	(2,N+1)
...		
(K+2*A,N+1-2*B)	(K+A,N+1-B)	(K,N+1)

Para que esta tabla esté completa, el último segmento tiene que estar en la última columna, lo que nos lleva a:

$$K = N+1 - 2*A$$

Sin embargo, fijémonos que el último segmento de la primera tabla, además de tener un vértice en la última fila tiene un vértice en la última columna, y en la otra tabla pasa lo recíproco. Es decir, el último segmento de las dos tablas es el mismo. Por tanto, el número de segmentos aportados entre las dos tablas viene dado por la suma de J y K menos uno.

$$\text{Nuevos segmentos} = J + K – 1 = 2*N – 2*A – 2*B + 1$$

Ahora sigamos por los segmentos donde la coordenada de la columna (la primera), se incrementa en A y la de la fila se incrementa en B. Podríamos hacer un razonamiento análogo al anterior, pero vamos a tomar un atajo. Los segmentos que pretendemos contar ahora son los correspondientes a reflejar por su punto medio y horizontalmente cada uno de los anteriores. Para cada segmento, el vértice que estaba en la nueva columna, al reflejarlo, deja de estarlo, pero en compensación el vértice opuesto si va a quedar en la nueva columna. Lo mismo sucede con las filas. Por tanto tendremos la misma cantidad de nuevos segmentos que en el caso anterior.

Ahora intercambiamos filas por columnas. Es decir, la columna se reduce o incrementa en B mientras que la fila se incrementa en A unidades. El resultado corresponde a reflejar el cuadrado con respecto a la diagonal.

En definitiva, para una determinada combinación de A y B válida, el número de segmentos “nuevos” (con al menos un vértice en la misma fila o columna) se incrementa en esta cantidad.

$$\text{Nuevos segmentos} = 4 * (2*N – 2*A – 2*B + 1) = 8*N – 8*A – 8*B + 4$$

Esta fórmula asegura que el número segmentos con una inclinación diferente de 0, 45 o 90 grados es múltiplo de cuatro. Esto se demuestra por inducción. Llamando R(N) al número de segmentos inclinados de este tipo, tenemos que R(4) = 0, ya que no caben en un cuadrado de 4x4 segmentos con inclinaciones diferentes de 0, 45 o 90 grados. Para calcular R(N+1) tenemos:

R(N+1) = R(N) + Sumatorio [8*N – 8*A – 8*B + 4]

Donde el sumatorio aplica a las combinaciones de A y B posibles en cuadrado de N+1 x N+1 vértices. Puesto que el contenido del sumatorio es múltiplo de 4, si R(N) es múltiplo de 4 entonces R(N+1) también lo será. Dado que R(4)=0 (que podemos considerar múltiplo de 4), la condición queda demostrada para todo N>=4.

Sin embargo, esto no demuestra que sea o deje de ser múltiplo de 8. Aunque el contenido del sumatorio no es múltiplo de 4, no sabemos cuantas veces los estamos aplicando. Si encontramos que en cuadrado de N+1 por N+1 siempre habrá un número par de combinaciones válidas de A y B, entonces si podremos demostrar que los segmentos son múltiplos de 8.

Respecto al número total de segmentos, incluidos los que tienen inclinación de 0, 45 o 90 grados, podemos asegurar lo mismo: que son múltiplos de 4.

Parte 6: El contrajemplo.

Consideremos el caso N=4, es decir, pasar de 4 a 5 vértices por lado del cuadrado. La única combinación posible de valores de A y B, con A<B, que generen segmentos que quepan en el cuadrado de 5x5 es A=1, B=2. Esta combinación corresponde a segmentos con vértices contiguos separados por el salto de un caballo de ajedrez. El número de segmentos con esta inclinación añadidos es:

Nuevos segmentos = 4 * (2*N – 2*A – 2*B + 1) = 8*N – 8*A – 8*B + 4 = 8*4 – 8*1 – 8*2 + 4 = 12

Ops, 12 no es múltiplo de 8. Si no me equivocado, esto es un contraejemplo de lo que se quería demostrar.

Analicemos “a mano” el caso del cuadrado de 5x5 vértices. ¿Cuantos segmentos caben?

Empecemos por los segmentos horizontales y verticales. En cada fila hay tres segmentos posibles: el que une el primer punto con el tercero, el que une segundo con cuarto, y el que enlaza tercero y quinto. Puesto que hay 5 filas, totalizan 15 segmentos horizontales. Del mismo modo, por columnas totalizaremos 15 segmentos verticales.

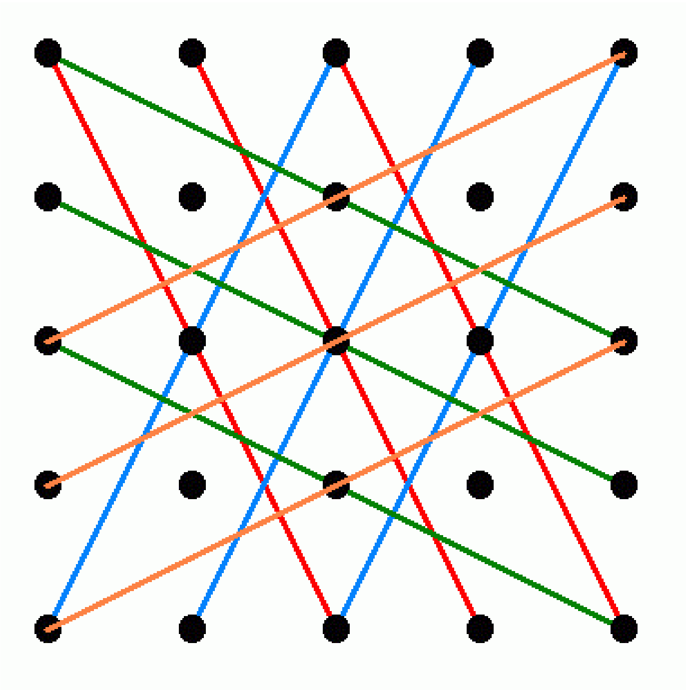
Ahora contemos los diagonales a 45 grados. Empecemos por los descendentes, es decir de arriba a la izquierda hacia abajo a la derecha. En la diagonal principal hay cinco vértices que dan lugar a 3 segmentos. En la diagonal superior a esta hay cuatro puntos, los que nos aporta otros 2 segmentos. En la diagonal siguiente solo hay tres vértices por lo que tenemos 1 único segmento posible. En las diagonales inferiores a la principal principales tenemos 2 segmentos en la de cuatro vértices y 1 en la de tres. En total tenemos 3 + 2 + 1 + 2 + 1 = 9 segmentos diagonales a 45 grados descendentes. Por simetría, tendremos otros 9 en las diagonales a 45 grados ascendentes (de abajo izquierda hacia arriba derecha).

Paremos a recontar: 15 horizontales + 15 verticales + 18 diagonales a 45 grados = 48 segmentos.

Esto concuerda con la fórmula general obtenida en la parte 3 de esta demostración:

S(n) = 4*n^2 - 12*n + 8 = 4 * 25 – 12* 5 + 8 = 100 – 60 + 8 = 48.

Contemos ahora los segmentos en una inclinación diferente. Para ello recurrimos a la figura siguiente, donde se han pintado de diferente color los segmentos de diferente inclinación. Remarquemos que en esta figura solo pintamos los que no están a 0, 45 o 90 grados.



Tenemos 3 segmentos rojos, 3 azules, 3 verdes y 3 naranjas, totalizando 12, concordando con lo calculado antes.

Por tanto, para N=5, (si no me he equivocado, cosa que no descarto) tenemos 48 + 12 = 60 segmentos posibles, que no es múltiplo de 8 aunque si de 4.

En conclusión, se demuestra que el número de segmentos delimitados por exactamente tres vértices en un cuadrado de NxN vértices es múltiplo de 4, y mediante el contrajemplo para N=5, que no siempre es múltiplo de 8.