SOLUCIÓN AL 40+1 DESAFÍO

Tenemos una red de puntos distribuidos en los vértices de una cuadrícula en un plano. Éstos forman un cuadrado con N puntos en cada lado.

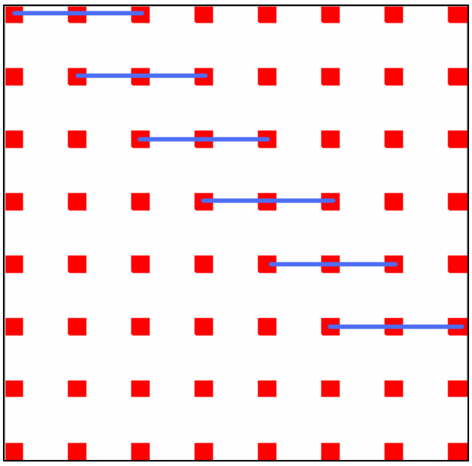
Hay que demostrar que que para cualquier N par mayor que 2, el número de diferentes segmentos de línea recta que contienen y quedan delimitados por 3 puntos (consecutivos) de la red es múltiplo de 8.

Hagamos la cuenta de la vieja.

Segmentos horizontales

Existen N rectas horizontales en la red. En cada una de ellas se pueden tomar N-2 segmentos que contienen tres puntos consecutivos. Por lo tanto, el número de segmentos horizontales es:

$$N \cdot (N-2)$$

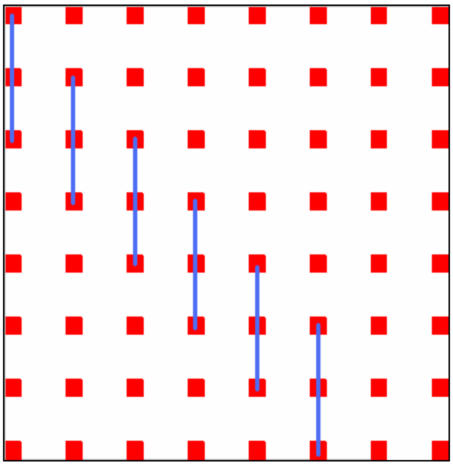


(Segmentos posibles en una recta horizontal)

Segmentos verticales

Existen N rectas verticales en la red. En cada una de ellas se pueden tomar N-2 segmentos que contienen tres puntos consecutivos. Por lo tanto, el número de segmentos verticales es:

$$N \cdot (N-2)$$



(Segmentos posibles en una recta vertical)

Segmentos diagonales a ±45º

Existen dos direcciones para estas diagonales, a +45º y a -45º. En cada una de ellas tenemos:

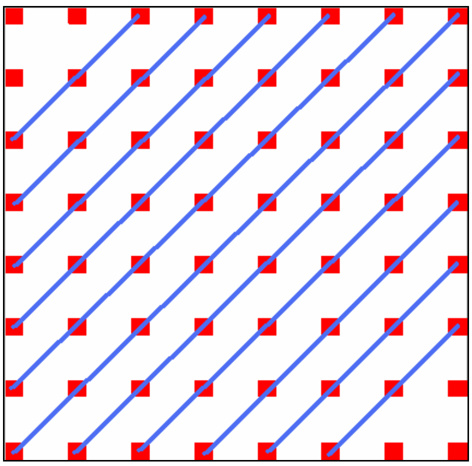
- dos rectas que pasan por tres vértices → $2\cdot(3-2) = 2$ segmentos
- dos rectas que pasan por cuatro vértices → $2\cdot(4-2) = 4$ segmentos
- …
- dos rectas que pasan por N-3 vértices → $2\cdot(N-3)$ segmentos
- una recta que pasa por N-2 vértices → $(N-2)$ segmentos

Por lo tanto, el número de segmentos en cada dirección será:

$$1 + 2 + \ldots + (N-3) + (N-2) + (N-3) + \ldots + 2 + 1 = (N-2)^2$$

Y en las dos direcciones, evidentemente:

$$2\cdot(N-2)^2$$



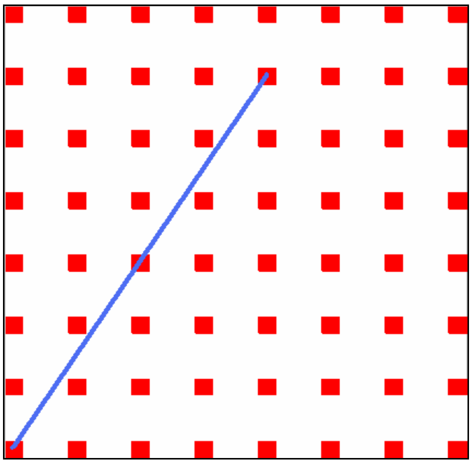
Rectas a +45º

Diagonales largas

Las diagonales largas son aquellas en las que entre dos puntos consecutivos nos saltamos, o más de una fila, o más de una columna, o más de una fila y una columna.

Una familia de diagonales queda definida por el número de filas (f) y columnas (c) que se saltan entre dos puntos consecutivos. Para que los puntos de las diagonales sean consecutivos, es necesario que f y c no tengan factores en común.

Por ejemplo, las diagonales a +45º son la familia (f = 1, c = 1). En la figura de abajo se muestra el caso (f = 3, c= 2).

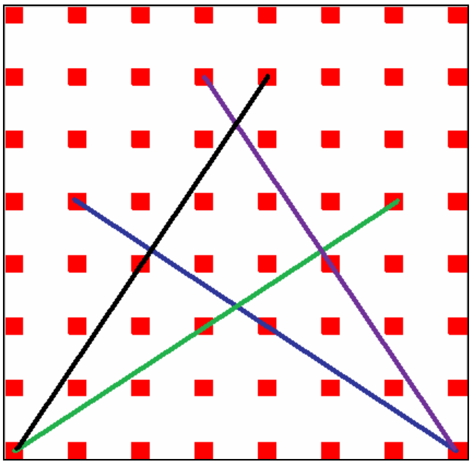


Diagonal larga de la familia f = 3, c = 2

Diremos que dos familias están emparentadas si se puede pasar de una a la otra mediante giros y simetrías:

- original (en negro en la figura): (f, c)
- simetría (en lila en la figura): (f, -c)
- giro de 90º(en azul en la figura): (c, -f)
- simetría y giro de 90º (en verde en la figura): (c, f)

Las familias se emparentan de cuatro en cuatro, salvo en ciertos casos 'degenerados' en que dos familias emparentadas son en realidad la misma familia (por ejemplo, las diagonales a 45º vuelven a ser ellas mismas tras un giro y una simetría).



Familias emparentadas

Para contar las diagonales largas, pongamos la restricción adicional $c > f \geq 1$. Entonces:

- se elimina la familia de rectas horizontales (f = 0), que ya está contada
- se elimina la familia de rectas verticales (c = 0), que ya está contada
- se elimina la familia la familia de diagonales a +45º (f = 1, c = 1), que ya está contada
- no hay casos degenerados
- no hay familias emparentadas entre sí

Contemos el número de diagonales de la familia (f, c). Un segmento de esta familia abarca:

- $2 \cdot f + 1$ filas
- $2 \cdot c + 1$ columnas

Por lo tanto, la posición del extremo izquierdo se puede colocar en:

- $N - (2 \cdot f + 1) + 1 = N - 2 \cdot f$ filas
- $N - (2 \cdot c + 1) + 1 = N - 2 \cdot c$ columnas

Fijémonos en que para que existan estas diagonales, se deben poder colocar en al menos una fila y columna, de donde:

$$N > 2 \cdot c > 2 \cdot f$$

Entonces, el número total de miembros de una familia es:

$$(N - 2 \cdot f) \cdot (N - 2 \cdot c)$$

el de una familia y sus familias emparentadas es:

$$4 \cdot (N - 2 \cdot f) \cdot (N - 2 \cdot c)$$

y el número total de diagonales largas es:

$$4 \cdot \sum (N - 2 \cdot f) \cdot (N - 2 \cdot c)$$

siendo $c > f \geq 1$ y primos entre sí.

Suma total de segmentos

El número total de segmentos es:

- Si N ≤ 4:

$$4 \cdot (N-1) \cdot (N-2)$$

- Si N > 4:

$$4 \cdot \left[(N-1) \cdot (N-2) + \sum (N - 2 \cdot f) \cdot (N - 2 \cdot c)\right]$$

El primer sumando del corchete es par porque o (N-1) o (N-2) es par.

El segundo sumando del corchete es par si:

- N es par
- el número de familias (f, c) que cumplen las restricciones impuestas es par

Por lo tanto, si N es par, los dos sumandos del corchete son pares y la suma total es múltiplo de ocho. Y queda demostrado el enunciado.

Si N es impar, pueden darse casos en que también sea múltiplo de ocho. Basta con que el número de familias (f, c) que cumplen las restricciones impuestas sea par. No sé si se puede dar esta situación. Desde luego, hasta N = 50 no.

N	**Segmentos**	**N**	**Segmentos**	**N**	**Segmentos**	**N**	**Segmentos**	**N**	**Segmentos**
		11	1196	21	15068	31	70972	41	216268
		12	1672	22	17968	32	80296	42	237824
3	8	13	2284	23	21604	33	90740	43	261460
4	24	14	2992	24	25576	34	101824	44	286216
5	60	15	3988	25	30092	35	114700	45	313012
6	112	16	5128	26	34976	36	128344	46	341008
7	212	17	6556	27	40900	37	143212	47	372316
8	344	18	8160	28	47288	38	158896	48	405000
9	548	19	10180	29	54500	39	176836	49	439860
10	800	20	12424	30	62224	40	195736	50	476160