

DESAFÍO 55: EL CUADRILÁTERO DE SEBAS

Los amigos Sebas, Lado y Perímetro se encuentran para tomar un refresco y mientras esperan que les sirvan deciden pasar el rato discutiendo de matemática, ayudados únicamente de lápiz y papel.

Sebas: ¿Cual es el cuadrilátero de lados números naturales, el mayor de los cuales mide 67, que tiene una diagonal igual al diámetro de la circunferencia en la que está inscrito?

El camarero, que se encontrada sirviendo los refrescos en el momento en que Sebas planteó el problema, se une a la conversación diciendo: “Entonces el área también es un entero y el perímetro un par”.

Los tres se miran sorprendidos, ¿tiene razón el camarero?

Después de ensuciar papel, la conversación sigue:

Lado: Con estos datos nos es imposible resolver el problema.

Sebas: Tenéis razón, os daré otros datos; a ti, Lado, te diré el valor de uno de sus lados y a ti, Perímetro, el de su perímetro.

Al conocer estos últimos datos ambos consultan sus cálculos y...

Lado: De poco me ha servido la información, sigo sin poder resolverlo.

Perímetro: Lo mismo me pasa a mí.

Lado: Yo no he podido resolverlo, tampoco Perímetro, mucho me temo que no lleguemos a la solución.

Perímetro: Pues yo ahora sí sé las dimensiones.

Lado: Entonces si tú las sabes, yo también las sé.

¿Cuáles son las dimensiones de los lados del cuadrilátero?

Solución

Lo primero es darse cuenta de que el cuadrilátero se puede descomponer en dos triángulos rectángulos. Nos aprovecharemos de la siguiente propiedad:

La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad del arco que abarca, es decir, la mitad del ángulo central correspondiente.

Como una diagonal coincide con el diámetro de la circunferencia circunscrita y un diámetro abarca 180° , entonces los ángulos por los que no pasa esa diagonal son de 90° . Por lo tanto, tenemos un triángulo rectángulo a cada lado de la diagonal. Estos triángulos los identificaré por un nombre y la longitud de sus catetos:

- T1 (a, b), con $a = 67$
- T2 (c, d)

Lo segundo, va a ser probar que el camarero tiene razón. Dado que los triángulos tienen los catetos enteros, el cuadrado del diámetro será otro entero, que puede ser par o impar.

- Caso 1:

Si D^2 es impar, entonces b es par, c impar y d par.

El perímetro será la suma de dos pares y dos impares, que es par.

El área la suma de las áreas de T1 (el producto de un impar por un par dividido entre dos, que es un entero) y T2 (que es otro entero por el mismo motivo).

- Caso 2:

Si D^2 es par, entonces b es impar y:

- Caso 2.1: c impar y d impar.

El perímetro será la suma de cuatro impares, que es par.

El área la suma de las áreas de T1 (el producto de dos impares por un par dividido entre dos, que es igual a un número entero más un medio) y T2 (que es otro entero más un medio por el mismo motivo). La suma de ambos es igual a la suma de dos números enteros más uno, que también es entero.

- Caso 2.2: c par y d par.

Esta solución no es posible porque, a partir de a y b se deduce que D^2 es igual a dos más un múltiplo de cuatro, y a partir de c y d se deduce que es un múltiplo de cuatro, y ambas cosas no se pueden dar a la vez.

Lo siguiente va a ser obtener el campo de soluciones posibles. Lo obtendré como todas aquellas cuaternas / a / b / c / d / que satisfacen la condición de la diagonal común. Esto es:

$$D^2 = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

Usando fuerza bruta (lo siento Sebas, no veo como aplicar el resultado del camarero ni nada que se parezca a la fórmula general de obtención de ternas pitagóricas), me salen 28 posibilidades.

SOLUCIÓN	LADOS	PERÍMETRO	SOLUCIÓN	LADOS	PERÍMETRO
1	/ 67 / 1 / 53 / 41 /	162	15	/ 67 / 16 / 53 / 44 /	180
2	/ 67 / 3 / 63 / 23 /	156	16	/ 67 / 16 / 61 / 32 /	176
3	/ 67 / 4 / 56 / 37 /	164	17	/ 67 / 19 / 59 / 37 /	182
4	/ 67 / 4 / 59 / 32 /	162	18	/ 67 / 19 / 65 / 25 /	176
5	/ 67 / 4 / 61 / 28 /	160	19	/ 67 / 21 / 57 / 41 /	186
6	/ 67 / 5 / 65 / 17 /	154	20	/ 67 / 21 / 63 / 31 /	182
7	/ 67 / 6 / 50 / 45 /	168	21	/ 67 / 23 / 53 / 47 /	190
8	/ 67 / 6 / 66 / 13 /	152	22	/ 67 / 26 / 61 / 38 /	192
9	/ 67 / 8 / 52 / 43 /	170	23	/ 67 / 29 / 59 / 43 /	198
10	/ 67 / 9 / 59 / 33 /	168	24	/ 67 / 30 / 58 / 45 /	200
11	/ 67 / 10 / 58 / 35 /	170	25	/ 67 / 31 / 65 / 35 /	198
12	/ 67 / 11 / 49 / 47 /	174	26	/ 67 / 32 / 53 / 52 /	204
13	/ 67 / 13 / 53 / 43 /	176	27	/ 67 / 36 / 59 / 48 /	210
14	/ 67 / 14 / 62 / 29 /	172	28	/ 67 / 44 / 61 / 52 /	224

Como Perímetro no puede dar la solución, sabemos que para el perímetro que le han dado hay más de una solución. Por lo tanto, Perímetro se encuentra en una de estas situaciones:

SOLUCIÓN	LADOS	PERÍMETRO
1	/ 67 / 1 / 53 / 41 /	162
4	/ 67 / 4 / 59 / 32 /	
7	/ 67 / 6 / 50 / 45 /	168
10	/ 67 / 9 / 59 / 33 /	
9	/ 67 / 8 / 52 / 43 /	170
11	/ 67 / 10 / 58 / 35 /	
13	/ 67 / 13 / 53 / 43 /	176
16	/ 67 / 16 / 61 / 32 /	
18	/ 67 / 19 / 65 / 25 /	
17	/ 67 / 19 / 59 / 37 /	182
20	/ 67 / 21 / 63 / 31 /	
23	/ 67 / 29 / 59 / 43 /	198
25	/ 67 / 31 / 65 / 35 /	

Sabemos que para el dato de Lado hay más de una solución. Por lo tanto, está en una de estas situaciones.

SOLUCIÓN	LADOS	PERÍMETRO	LADO DADO	SOLUCIÓN	LADOS	PERÍMETRO	LADO DADO
3	/ 67 / 4 / 56 / 37 /	164	4	15	/ 67 / 16 / 53 / 44 /	180	44
4	/ 67 / 4 / 59 / 32 /	162		28	/ 67 / 44 / 61 / 52 /	224	
5	/ 67 / 4 / 61 / 28 /	160		7	/ 67 / 6 / 50 / 45 /	168	45
7	/ 67 / 6 / 50 / 45 /	168	6	24	/ 67 / 30 / 58 / 45 /	200	
8	/ 67 / 6 / 66 / 13 /	152		12	/ 67 / 11 / 49 / 47 /	174	47
8	/ 67 / 6 / 66 / 13 /	152	13	21	/ 67 / 23 / 53 / 47 /	190	
13	/ 67 / 13 / 53 / 43 /	176		9	/ 67 / 8 / 52 / 43 /	170	52
15	/ 67 / 16 / 53 / 44 /	180	16	26	/ 67 / 32 / 53 / 52 /	204	
16	/ 67 / 16 / 61 / 32 /	176		28	/ 67 / 44 / 61 / 52 /	224	
17	/ 67 / 19 / 59 / 37 /	182	19	1	/ 67 / 1 / 53 / 41 /	162	53
18	/ 67 / 19 / 65 / 25 /	176		13	/ 67 / 13 / 53 / 43 /	176	
19	/ 67 / 21 / 57 / 41 /	186	21	15	/ 67 / 16 / 53 / 44 /	180	
20	/ 67 / 21 / 63 / 31 /	182		21	/ 67 / 23 / 53 / 47 /	190	
2	/ 67 / 3 / 63 / 23 /	156	23	26	/ 67 / 32 / 53 / 52 /	204	58
21	/ 67 / 23 / 53 / 47 /	190		11	/ 67 / 10 / 58 / 35 /	170	
14	/ 67 / 14 / 62 / 29 /	172	29	24	/ 67 / 30 / 58 / 45 /	200	59
23	/ 67 / 29 / 59 / 43 /	198		4	/ 67 / 4 / 59 / 32 /	162	
20	/ 67 / 21 / 63 / 31 /	182	31	10	/ 67 / 9 / 59 / 33 /	168	
25	/ 67 / 31 / 65 / 35 /	198		17	/ 67 / 19 / 59 / 37 /	182	
4	/ 67 / 4 / 59 / 32 /	162	32	23	/ 67 / 29 / 59 / 43 /	198	61
16	/ 67 / 16 / 61 / 32 /	176		27	/ 67 / 36 / 59 / 48 /	210	
26	/ 67 / 32 / 53 / 52 /	204		5	/ 67 / 4 / 61 / 28 /	160	
11	/ 67 / 10 / 58 / 35 /	170	35	16	/ 67 / 16 / 61 / 32 /	176	63
25	/ 67 / 31 / 65 / 35 /	198		22	/ 67 / 26 / 61 / 38 /	192	
3	/ 67 / 4 / 56 / 37 /	164	37	28	/ 67 / 44 / 61 / 52 /	224	65
17	/ 67 / 19 / 59 / 37 /	182		2	/ 67 / 3 / 63 / 23 /	156	
1	/ 67 / 1 / 53 / 41 /	162	41	20	/ 67 / 21 / 63 / 31 /	182	
19	/ 67 / 21 / 57 / 41 /	186		6	/ 67 / 5 / 65 / 17 /	154	
9	/ 67 / 8 / 52 / 43 /	170	43	18	/ 67 / 19 / 65 / 25 /	176	
13	/ 67 / 13 / 53 / 43 /	176		25	/ 67 / 31 / 65 / 35 /	198	
23	/ 67 / 29 / 59 / 43 /	198					

Eliminamos las soluciones que no están entre las de Perímetro.

SOLUCIÓN	LADOS	PERÍMETRO	LADO DADO	SOLUCIÓN	LADOS	PERÍMETRO	LADO DADO
3	/ 67 / 4 / 56 / 37 /	164	4	15	/ 67 / 16 / 53 / 44 /	180	44
4	/ 67 / 4 / 59 / 32 /	162		28	/ 67 / 44 / 61 / 52 /	224	
5	/ 67 / 4 / 61 / 28 /	160		7	/ 67 / 6 / 50 / 45 /	168	45
7	/ 67 / 6 / 50 / 45 /	168	6	24	/ 67 / 30 / 58 / 45 /	200	
8	/ 67 / 6 / 66 / 13 /	152		12	/ 67 / 11 / 49 / 47 /	174	47
8	/ 67 / 6 / 66 / 13 /	152	13	21	/ 67 / 23 / 53 / 47 /	190	
13	/ 67 / 13 / 53 / 43 /	176		9	/ 67 / 8 / 52 / 43 /	170	52
15	/ 67 / 16 / 53 / 44 /	180	16	26	/ 67 / 32 / 53 / 52 /	204	
16	/ 67 / 16 / 61 / 32 /	176		28	/ 67 / 44 / 61 / 52 /	224	
17	/ 67 / 19 / 59 / 37 /	182	19	1	/ 67 / 1 / 53 / 41 /	162	53
18	/ 67 / 19 / 65 / 25 /	176		13	/ 67 / 13 / 53 / 43 /	176	
19	/ 67 / 21 / 57 / 41 /	186	21	15	/ 67 / 16 / 53 / 44 /	180	
20	/ 67 / 21 / 63 / 31 /	182		21	/ 67 / 23 / 53 / 47 /	190	
2	/ 67 / 3 / 63 / 23 /	156	23	26	/ 67 / 32 / 53 / 52 /	204	58
21	/ 67 / 23 / 53 / 47 /	190		11	/ 67 / 10 / 58 / 35 /	170	
14	/ 67 / 14 / 62 / 29 /	172	29	24	/ 67 / 30 / 58 / 45 /	200	59
23	/ 67 / 29 / 59 / 43 /	198		4	/ 67 / 4 / 59 / 32 /	162	
20	/ 67 / 21 / 63 / 31 /	182	31	10	/ 67 / 9 / 59 / 33 /	168	
25	/ 67 / 31 / 65 / 35 /	198		17	/ 67 / 19 / 59 / 37 /	182	
4	/ 67 / 4 / 59 / 32 /	162	32	23	/ 67 / 29 / 59 / 43 /	198	61
16	/ 67 / 16 / 61 / 32 /	176		27	/ 67 / 36 / 59 / 48 /	210	
26	/ 67 / 32 / 53 / 52 /	204	35	5	/ 67 / 4 / 61 / 28 /	160	
11	/ 67 / 10 / 58 / 35 /	170		16	/ 67 / 16 / 61 / 32 /	176	
25	/ 67 / 31 / 65 / 35 /	198	37	22	/ 67 / 26 / 61 / 38 /	192	63
3	/ 67 / 4 / 56 / 37 /	164		28	/ 67 / 44 / 61 / 52 /	224	
17	/ 67 / 19 / 59 / 37 /	182	41	2	/ 67 / 3 / 63 / 23 /	156	
1	/ 67 / 1 / 53 / 41 /	162		20	/ 67 / 21 / 63 / 31 /	182	
19	/ 67 / 21 / 57 / 41 /	186	43	6	/ 67 / 5 / 65 / 17 /	154	65
9	/ 67 / 8 / 52 / 43 /	170		18	/ 67 / 19 / 65 / 25 /	176	
13	/ 67 / 13 / 53 / 43 /	176	43	25	/ 67 / 31 / 65 / 35 /	198	
23	/ 67 / 29 / 59 / 43 /	198					

Cuando Perímetro tiene la solución, Lado tiene dudas. Por lo tanto, para su dato hay más de una solución. Eliminamos los lados con solución única.

SOLUCIÓN	LADOS	PERÍMETRO	LADO DADO	SOLUCIÓN	LADOS	PERÍMETRO	LADO DADO
3	/ 67 / 4 / 56 / 37 /	164	4	15	/ 67 / 16 / 53 / 44 /	180	44
4	/ 67 / 4 / 59 / 32 /	162		28	/ 67 / 44 / 61 / 52 /	224	
5	/ 67 / 4 / 61 / 28 /	160		6	7	/ 67 / 6 / 50 / 45 /	168
7	/ 67 / 6 / 50 / 45 /	168	24		/ 67 / 30 / 58 / 45 /	200	
8	/ 67 / 6 / 66 / 13 /	152	13		12	/ 67 / 11 / 49 / 47 /	174
8	/ 67 / 6 / 66 / 13 /	152		21	/ 67 / 23 / 53 / 47 /	190	
13	/ 67 / 13 / 53 / 43 /	176		16	9	/ 67 / 8 / 52 / 43 /	170
15	/ 67 / 16 / 53 / 44 /	180	26		/ 67 / 32 / 53 / 52 /	204	
16	/ 67 / 16 / 61 / 32 /	176	19		28	/ 67 / 44 / 61 / 52 /	224
17	/ 67 / 19 / 59 / 37 /	182		1	/ 67 / 1 / 53 / 41 /	162	
18	/ 67 / 19 / 65 / 25 /	176		21	13	/ 67 / 13 / 53 / 43 /	176
19	/ 67 / 21 / 57 / 41 /	186	15		/ 67 / 16 / 53 / 44 /	180	
20	/ 67 / 21 / 63 / 31 /	182	23		21	/ 67 / 23 / 53 / 47 /	190
2	/ 67 / 3 / 63 / 23 /	156		26	/ 67 / 32 / 53 / 52 /	204	
21	/ 67 / 23 / 53 / 47 /	190		29	11	/ 67 / 10 / 58 / 35 /	170
14	/ 67 / 14 / 62 / 29 /	172	24		/ 67 / 30 / 58 / 45 /	200	
23	/ 67 / 29 / 59 / 43 /	198	31		4	/ 67 / 4 / 59 / 32 /	162
20	/ 67 / 21 / 63 / 31 /	182		10	/ 67 / 9 / 59 / 33 /	168	
25	/ 67 / 31 / 65 / 35 /	198		32	17	/ 67 / 19 / 59 / 37 /	182
4	/ 67 / 4 / 59 / 32 /	162	23		/ 67 / 29 / 59 / 43 /	198	
16	/ 67 / 16 / 61 / 32 /	176	35		27	/ 67 / 36 / 59 / 48 /	210
26	/ 67 / 32 / 53 / 52 /	204		5	/ 67 / 4 / 61 / 28 /	160	
11	/ 67 / 10 / 58 / 35 /	170		37	16	/ 67 / 16 / 61 / 32 /	176
25	/ 67 / 31 / 65 / 35 /	198	22		/ 67 / 26 / 61 / 38 /	192	
3	/ 67 / 4 / 56 / 37 /	164	41		28	/ 67 / 44 / 61 / 52 /	224
17	/ 67 / 19 / 59 / 37 /	182		2	/ 67 / 3 / 63 / 23 /	156	
1	/ 67 / 1 / 53 / 41 /	162		43	20	/ 67 / 21 / 63 / 31 /	182
19	/ 67 / 21 / 57 / 41 /	186	6		/ 67 / 5 / 65 / 17 /	154	
9	/ 67 / 8 / 52 / 43 /	170	43		18	/ 67 / 19 / 65 / 25 /	176
13	/ 67 / 13 / 53 / 43 /	176		25	/ 67 / 31 / 65 / 35 /	198	
23	/ 67 / 29 / 59 / 43 /	198					

Por lo tanto, las soluciones posibles de Perímetro son las siguientes.

SOLUCIÓN	LADOS	PERÍMETRO
1	/ 67 / 1 / 53 / 41 /	162
4	/ 67 / 4 / 59 / 32 /	
7	/ 67 / 6 / 50 / 45 /	168
10	/ 67 / 9 / 59 / 33 /	
9	/ 67 / 8 / 52 / 43 /	170
11	/ 67 / 10 / 58 / 35 /	
13	/ 67 / 13 / 53 / 43 /	176
16	/ 67 / 16 / 61 / 32 /	
18	/ 67 / 19 / 65 / 25 /	
17	/ 67 / 19 / 59 / 37 /	182
20	/ 67 / 21 / 63 / 31 /	
23	/ 67 / 29 / 59 / 43 /	198
25	/ 67 / 31 / 65 / 35 /	

Pero ya sabe cuál es la solución y eso es porque su dato no da lugar a ninguna duda. Eso sólo es posible si su dato es un perímetro es 168. La solución es la número 10. Por lo tanto, el cuadrilátero tiene por lados / 67 / 9 / 59 / 33 /. Y el dato de Lado es 59 porque la solución 10 sólo aparece en para ese valor del lado.