

DESAFÍO 55: EL CUADRILÁTERO DE SEBAS.

Partimos de que tenemos un cuadrilátero ABCD.

- Su lado mayor $AB=67$.
- Existe la circunferencia circunscrita, lo que significa que los ángulos opuestos son complementarios, es decir, $DAB + BCD = 180$ y $ABC + CDA = 180$.
- Una de las diagonales, digamos que AC, mide lo mismo que el diámetro de la circunferencia circunscrita. Dado que A y C están en la circunferencia, deducimos que AC es el diámetro.
- B y D están situados en la circunferencia. Por lo tanto, B y D están situados en dos semicircunferencias de diámetro AC.
- Si B y D están en las semicircunferencias, deduzco que los triángulos ABC y CDA son triángulos rectángulos de hipotenusa igual al diámetro de la circunferencia, y los ángulos ABC y CDA son rectos

Ahora voy a comprobar las afirmaciones del camarero. Para ello, sabiendo que AB es impar, voy a ver las posibles distribuciones de par-impar para BC, CD y DA:

- Como ABC y CDA son triángulos rectángulos con la misma hipotenusa (el diámetro de la circunferencia circunscrita), aplico pitágoras: $AB^2 + BC^2 = CD^2 + DA^2$
- BC = par, CD = par, DA = par
 - o defino $BC = 2b$, $CD = 2c$ y $DA = 2d$
 - o $AB^2 + 4b^2 = 4c^2 + 4d^2$
 - o $\text{Impar} + \text{par} = \text{par} + \text{par}$. **Imposible**
- BC = impar, CD = par, DA = par
 - o defino $CD = 2c$ y $DA = 2d$
 - o $AB^2 + BC^2 = 4c^2 + 4d^2$
 - o AB^2 y BC^2 son impares, por lo tanto su suma será múltiplo de 2 pero no de 4, es decir $AB^2 + BC^2 = 2m$, donde m es impar
 - o $2m = 4(c^2 + d^2)$
 - o $m = 2(c^2 + d^2)$
 - o Pero hemos dicho que m es impar. **Imposible**
- BC = impar, CD = impar, DA = par (caso equivalente a CD = par y DA = impar)
 - o Defino $DA = 2d$
 - o $AB^2 + BC^2 = CD^2 + 4d^2$
 - o $\text{Impar} + \text{impar} = \text{impar} + \text{par}$. **Imposible**
- BC = par, CD = impar, DA = impar
 - o Defino $BC = 2b$
 - o $AB^2 + 4b^2 = CD^2 + DA^2$
 - o $\text{Impar} + \text{par} = \text{impar} + \text{impar}$. **Imposible**
- BC = par, CD = impar, DA = par (caso equivalente a CD = par y DA = impar)
 - o Defino $BC = 2b$ y $DA = 2d$
 - o $AB^2 + 4b^2 = CD^2 + 4d^2$
 - o $\text{Impar} + \text{par} = \text{impar} + \text{par}$. **Posible**
- BC = impar, CD = impar, DA = impar
 - o $AB^2 + BC^2 = CD^2 + DA^2$
 - o $\text{Impar} + \text{impar} = \text{impar} + \text{impar}$. **Posible**

Resumiendo los resultados en una tabla, sólo hay 3 casos posibles:

AB	BC	CD	DA	Posible
I	P	P	P	NO
I	I	P	P	NO
I	I	I	P	NO
I	I	P	I	NO
I	P	I	I	NO
I	P	I	P	SI
I	P	P	I	SI
I	I	I	I	SI

- $P = AB + BC + CD + DA$
 - o En los dos primeros casos $P = \text{impar} + \text{par} + \text{impar} + \text{par} = \text{par}$
 - o En el tercer caso $P = \text{impar} + \text{impar} + \text{impar} + \text{impar} = \text{par}$
 - o **Por lo tanto P siempre es par**
- El área de un cuadrilátero ABCD es $A = (AB * BC * \text{sen } ABC + CD * DA * \text{sen } CDA)/2$. Dado que $ABC = CDA = 90$ y $\text{sen}(90) = 1$, $A = (AB * BC + CD * DA)/2$. Se cumplirá que el área es un número exacto si $AB * BC + CD * DA$ es par
 - o En los dos primeros casos $A = (\text{impar} * \text{par} + \text{impar} * \text{par})/2 = (\text{par} + \text{par})/2 = \text{par}/2$. Entero
 - o En el tercer caso $A = (\text{impar} * \text{impar} + \text{impar} * \text{impar})/2 = (\text{impar} + \text{impar})/2 = \text{par}/2$. Entero
 - o **Por lo tanto A siempre es entero**

El camarero tiene razón, el área es un entero y el perímetro es par.

Para calcular los lados del cuadrilátero, primero hago una tabla con todas las soluciones posibles. Las restricciones son las siguientes:

- $AB = 67$
- BC varía de 1 a 66
- Para cada BC, CD varía de 1 a 66
- $DA^2 = AB^2 + BC^2 - CD^2$
- Pongo la limitación adicional de que $DA \leq CD$. En realidad, para cada solución que encuentre, existe otra cambiando los valores de CD y DA
- Los casos posibles son 28, según la tabla adjunta ordenada por el valor del perímetro (de paso, calculo el área, y compruebo que es entera):

AB	BC	CD	DA	PERIM	AREA
67	6	66	13	152	630
67	5	65	17	154	720
67	3	63	23	156	825
67	4	61	28	160	988
67	4	59	32	162	1078
67	1	53	41	162	1120
67	4	56	37	164	1170
67	9	59	33	168	1275
67	6	50	45	168	1326
67	10	58	35	170	1350
67	8	52	43	170	1386
67	14	62	29	172	1368
67	11	49	47	174	1520
67	19	65	25	176	1449
67	16	61	32	176	1512
67	13	53	43	176	1575
67	16	53	44	180	1702
67	21	63	31	182	1680
67	19	59	37	182	1728
67	21	57	41	186	1872
67	23	53	47	190	2016
67	26	61	38	192	2030
67	31	65	35	198	2176
67	29	59	43	198	2240
67	30	58	45	200	2310
67	32	53	52	204	2450
67	36	59	48	210	2622

67	44	61	52	224	3060
----	----	----	----	-----	------

La tabla con la distribución de frecuencias de los distintos valores de lado es la siguiente (eliminando los valores de L que no aparecen en las soluciones posibles):

Valor de L	Veces que aparece
1	1
3	1
4	3
5	1
6	2
8	1
9	1
10	1
11	1
13	2
14	1
16	2
17	1
19	2
21	2
23	2
25	1
26	1
28	1
29	2
30	1
31	2
32	3
33	1
35	2
36	1
37	2
38	1
41	2
43	3
44	2
45	2
47	2
48	1
49	1
50	1
52	3
53	5
56	1
57	1
58	2
59	5

61	4
62	1
63	2
65	3
66	1

- Sebas le dice a Lado: un lado mide L. Con ese dato, Lado no puede responder: *Lado: De poco me ha servido la información, sigo sin poder resolverlo.* Automáticamente, Perímetro sabe que L tiene un valor que aparece en la tabla de frecuencias con un valor mayor de 1. Es decir, que L pertenece al conjunto {4, 6, 13, 16, 19, 21, 23, 29, 31, 32, 35, 37, 41, 43, 44, 45, 47, 52, 53, 58, 59, 61, 63, 65}
- A continuación Sebas le dice a Perímetro que el perímetro mide P, pero con ese dato, Perímetro no puede responder: **Perímetro: Lo mismo me pasa a mí.** Al ver esto, Lado sabe que la solución es una de las siguientes, en las que el valor del perímetro aparece más de una vez:

AB	BC	CD	DA	PERIM
67	4	59	32	162
67	1	53	41	162
67	9	59	33	168
67	6	50	45	168
67	10	58	35	170
67	8	52	43	170
67	19	65	25	176
67	16	61	32	176
67	13	53	43	176
67	21	63	31	182
67	19	59	37	182
67	31	65	35	198
67	29	59	43	198

La tabla de frecuencias asociada al valor de L es la siguiente:

Valor de L	Veces que aparece
4	1
6	1
13	1
16	1
19	2
21	1
29	1
31	2
32	2
35	2
37	1
41	1
43	3
45	1
52	1
53	2
58	1

59	4
61	1
63	1
65	2

- Sin embargo, con ese dato Lado todavía no puede responder, porque el valor de L que le ha dado Sebas aparece en más de una solución: **Lado:** *Yo no he podido resolverlo, tampoco Perímetro, mucho me temo que no lleguemos a la solución.* Perímetro sabe automáticamente que L pertenece al siguiente conjunto de valores: {19, 31, 32, 35, 43, 53, 59 o 65}. Eso significa que de las soluciones posibles, hay que eliminar la solución (67, 6, 50, 41) con $P = 168$, ya que esas longitudes aparecen ninguna o sólo una vez, así que si L fuera uno de esos valores, Lado habría adivinado la solución.
- Perímetro mira en la lista y ve que eliminando ese caso, con el valor de P que le ha dado Sebas, ya sólo hay una solución, así que tiene que ser la correcta. El único valor del perímetro que no se repite es $P = 168$, con los valores (67, 9, 59, 33), y $L=59$. Perímetro anuncia que tiene la solución: **Perímetro:** *Pues yo ahora sí sé las dimensiones.*
- Al anunciar Perímetro que tiene la solución, Lado sabe automáticamente que de las 4 opciones que tenía con el valor $L=59$, la única correcta es la que no repite el área, es decir (67, 9, 59, 33), y $P=168$. Lado anuncia que tiene la solución: **Lado:** *Entonces si tú las sabes, yo también las sé.*

SOLUCIÓN: $AB = 67$, $BC = 9$, $CD = 59$ y $DA = 33$, con $L = 59$ y $P = 168$. También es correcta su simétrica en CD-DA, $AB = 67$, $BC = 9$, $CD = 33$ y $DA = 59$.

