

SOLUCIONARIO

Matemáticas

José María Arias Cabezas
Ildefonso Maza Sáez

EDUCACIÓN
SECUNDARIA
OBLIGATORIA **3**

 **Bruño**

Dirección del proyecto editorial

Antonio Díaz

Coordinación del proyecto editorial

Estrella Marinas

Coordinación de ediciones

Paz Utrera

Coordinación de preimpresión

Alberto García

Coordinación de diseño y diseño de cubiertas

Cristóbal Gutiérrez

Este libro corresponde al tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria, materia de Matemáticas, y forma parte de los materiales curriculares del proyecto del Grupo Editorial Bruño, S. L.

© del texto: José María Arias Cabezas; Idefonso Maza Sáez

© de esta edición: Grupo Editorial Bruño, S. L., 2011

Juan Ignacio Luca de Tena, 15
28027 Madrid

Impreso en

ISBN: 978-84-216-6759-0

Depósito legal: M-00.000-2011

Printed in Spain

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista en la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos: www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

ÍNDICE

Recursos complementarios del Proyecto	4
Programación	4
Proyecto Curricular	4
Solucionario	4
Gestor de Evaluaciones	4
Plantillas de Valoración del Desarrollo de las Competencias Básicas	5
Actividades Interactivas	5
Libros Electrónicos	6
Solucionario bloque I. Aritmética	9
1. Números racionales e irracionales	10
2. Potencias y raíces	22
3. Sucesiones y progresiones	30
4. Proporcionalidad	42
Evaluación de diagnóstico	51
Solucionario bloque II. Álgebra	53
5. Operaciones con polinomios	54
6. Ecuaciones de 1.º y 2.º grado	62
7. Sistemas de ecuaciones lineales	76
Evaluación de diagnóstico	89
Solucionario bloque III. Funciones y gráficas	91
8. Características globales de las funciones	92
9. Rectas e hipérbolas	108
Evaluación de diagnóstico	135
Solucionario bloque IV. Geometría	139
10. Teoremas de Thales y Pitágoras	140
11. Movimientos	152
12. Áreas y volúmenes	163
Evaluación de diagnóstico	177
Solucionario bloque V. Estadística y probabilidad	181
13. Estadística	182
14. Probabilidad	197
Evaluación de diagnóstico	208

RECURSOS COMPLEMENTARIOS DEL PROYECTO

Programación

Archivo informático editable (documento Word) que contiene la Programación de aula.

Proyecto curricular

Archivo informático editable (documento Word) que contiene:

- I. La Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en la Ley Orgánica de Educación (LOE).
- II. Los alumnos y alumnas de ESO: Marco general psicoevolutivo.
- III. Principios metodológicos del Proyecto Bruño.
- IV. Matemáticas.
 1. Perfil de salida curricular.
 2. Modelo de actos intelectuales.
 3. Principios metodológicos y didácticos.
 4. Cálculo mental. El carné de calculista.
 5. Organización de una clase.
 6. Organización de una unidad didáctica.
 7. Matemáticas con informática.
 8. Organización de cada libro de la ESO.
 9. Atención a la diversidad del alumnado.
 10. Educación en valores y para la convivencia (contenidos transversales).
 11. Concepto de evaluación.
 - 11.1. Características de la evaluación.
 - 11.2. Instrumentos o pruebas.
 - 11.3. Características de las pruebas.
 - 11.4. ¿Qué evaluar?
 - 11.5. Cómo evaluar y criterios de calificación.
 - 11.6. ¿Cuándo evaluar?
 - 11.7. Evaluación de diagnóstico.
 12. Competencias básicas.
 - 12.1. Competencias básicas.
 13. Objetivos generales de la etapa.
 14. Contenidos de la etapa.
 15. Criterios de evaluación de la etapa.

Solucionario

Archivo informático (formato pdf) que contiene el solucionario de todas las actividades del libro.

Gestor de Evaluaciones

El Gestor de Evaluaciones consta de una base de datos de actividades y un programa informático que permite generar aleatoriamente pruebas de evaluación de los contenidos de las unidades que se deseen evaluar.

Las actividades están agrupadas en ejercicios y problemas y clasificadas según las unidades didácticas del libro del alumno.

Para obtener una prueba de evaluación, el docente debe elegir las unidades didácticas que desea evaluar y el número de actividades que quiere incluir en la prueba. El programa genera automáticamente siempre una prueba de evaluación diferente, así como el solucionario de las actividades incluidas en la misma.

El programa permite también repasar la base de datos de actividades, con la posibilidad de marcar algunas para que se incluyan necesariamente en la prueba generada o descartar otras.

Igualmente, es posible editar el enunciado de las actividades cambiando algunos de sus datos, así como incluir en la base de datos nuevas actividades. Obviamente, el solucionario no recogerá estas modificaciones o ampliaciones.

Plantillas de Valoración del Desarrollo de las Competencias Básicas

Las plantillas de **Valoración de competencias básicas** ayudan al profesorado a realizar una valoración continua de las dimensiones de las competencias básicas que los alumnos van adquiriendo a medida que trabajan con los distintos materiales didácticos que forman parte del proyecto.

Las plantillas pueden utilizarse en soporte informático o bien impresas.

Actividades Interactivas

TALLER DIGITAL

El Taller Digital es un conjunto de $14 \cdot 40 = 560$ actividades relativas a los contenidos curriculares de la materia y organizadas según las unidades didácticas del libro del alumno con 10 preguntas por cada una de las 4 secciones de cada unidad didáctica, es decir, 40 por unidad didáctica.

Las actividades que componen el Taller tienen siempre estas características:

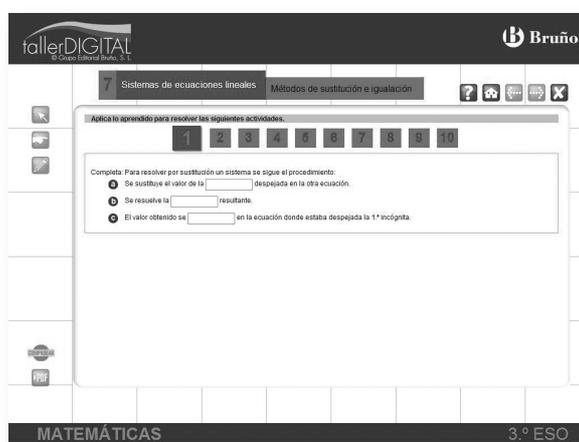
- Son de resolución interactiva por medio del teclado.
- Son autocorregibles.
- Ofrecen la opción de guardarse o imprimirse cuando se han realizado correctamente.

Son del siguiente tipo:



Actividades propuestas

Son actividades destinadas a consolidar los conocimientos y procedimientos trabajados.



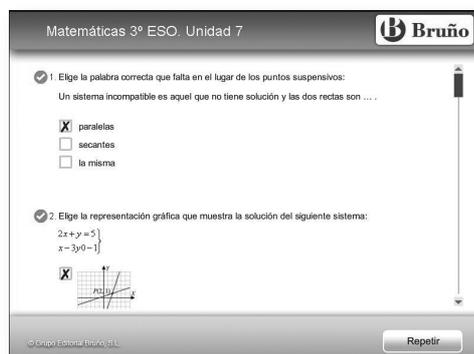
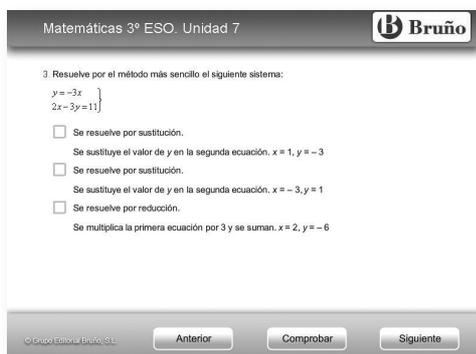
El Taller Digital puede utilizarse como una **batería de actividades independientes** o bien como una **secuencia ordenada de actividades** que permite la navegación entre las unidades didácticas y las diferentes actividades. Es compatible con entornos SCORM.

ACTIVIDADES DE AUTOEVALUACIÓN

Las actividades interactivas de autoevaluación están organizadas según las unidades didácticas del libro del alumno.

Consisten en una prueba de comprobación de los contenidos aprendidos en la unidad didáctica que consta de 8 preguntas de opción múltiple en las que se avanza gradualmente.

En cada pregunta se puede comprobar el resultado, repetirla cuantas veces se desee y avanzar o retroceder en la secuencia de actividades. Al final del proceso se muestra las respuestas correctas y las acertadas. Son compatibles con entornos SCORM.



Libros Electrónicos

El **libro electrónico** desarrolla los contenidos curriculares de la materia empleando variados recursos u objetos digitales, tanto dinámicos como interactivos, capaces de provocar una enseñanza y aprendizaje más motivadores, dinámicos y significativos.

El libro electrónico se visualiza en un entorno que incluye herramientas de navegación y de utilidades para personalizar la publicación (señalar, marcar, añadir comentarios u archivos, etc.).

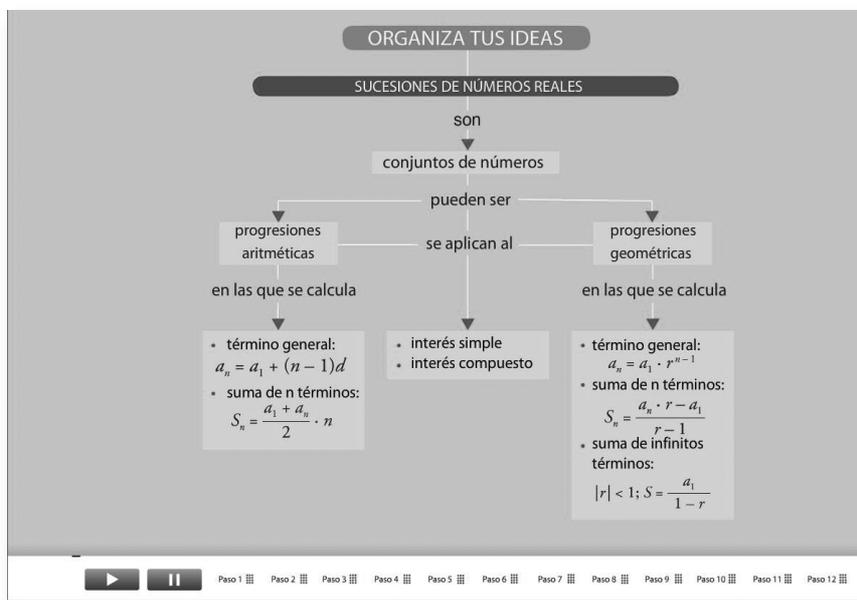
En 3º de ESO, el libro electrónico está orientado a su utilización en Pizarra Digital Interactiva (PDI). Además de los recursos didácticos digitales, incluye accesos a:

- Las programaciones de curso y de aula.
- Las soluciones de todas las actividades propuestas.
- Las soluciones de todas las actividades interactivas.

En los libros electrónicos el proceso de enseñanza-aprendizaje se apoya y consolida con estos **recursos didácticos digitales**:

Animaciones

- **Construcción del apartado *Organiza tus ideas***. Es un mapa conceptual. Se realiza el repaso de los contenidos trabajados en la unidad. De este modo el profesorado, en la Pizarra Digital Interactiva (PDI), puede construir el esquema desde el principio hasta el fin, obteniendo así una visión global de la misma. Con el botón se controla la secuenciación de las distintas pantallas para que el docente pueda incluir sus comentarios durante la explicación en la Pizarra Digital Interactiva (PDI).



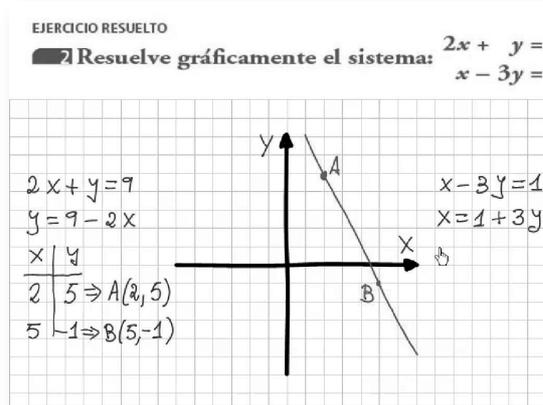
- **Desarrollo de contenidos teóricos**. Se pretende repasar un contenido trabajado en la unidad. Con el botón que controla la secuenciación de las distintas pantallas el profesorado puede incluir sus comentarios durante la explicación en la Pizarra Digital Interactiva (PDI).

3.2 ¿Qué método utilizar?

Todos los sistemas se pueden resolver por los tres métodos, pero hay sistemas en los que un método es mucho más sencillo de aplicar que otro. Para elegir un método se puede tener en cuenta:

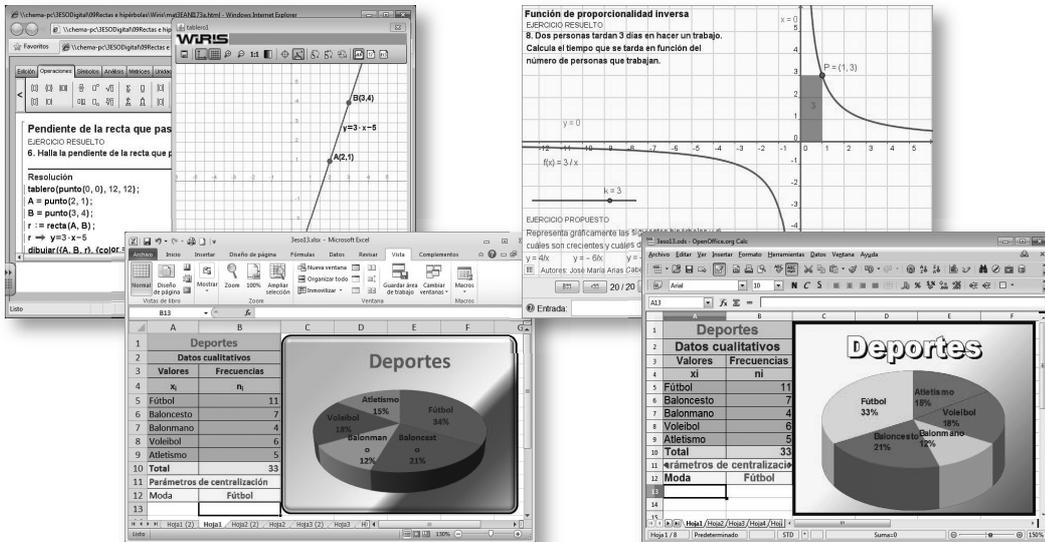
- Se resuelven fácilmente por **sustitución** los sistemas en los que una de las incógnitas ya esté despejada.
- Se resuelven fácilmente por **igualación** los sistemas en los que una de las dos incógnitas ya esté despejada en las dos ecuaciones.
- Se resuelven por **reducción** los sistemas en los que no parezca fácil aplicar sustitución o igualación.

- **Modelos de ejercicios resueltos.** Este elemento se utiliza para explicar con detalle todos los aspectos relacionados con un determinado ejercicio resuelto del libro del alumno. En cada pantalla generalmente se realiza la locución del procedimiento seguido en la resolución.



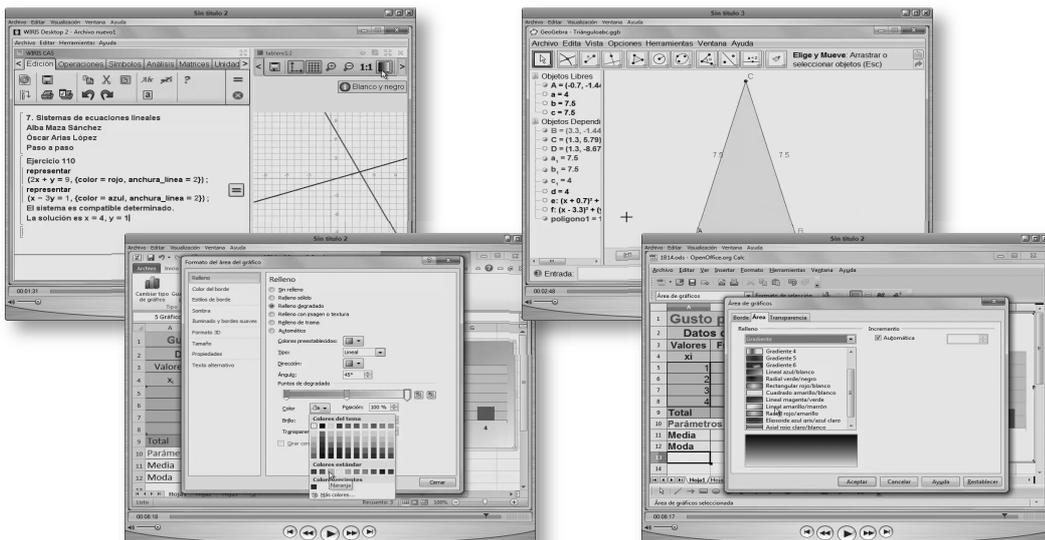
- **Applets de Wiris y GeoGebra y hojas de cálculo de Excel o Calc**

Los *applets* están diseñados de forma que el alumnado dispone de unas herramientas virtuales que le permiten resolver cada tipo de ejercicio o problema de Matemáticas.



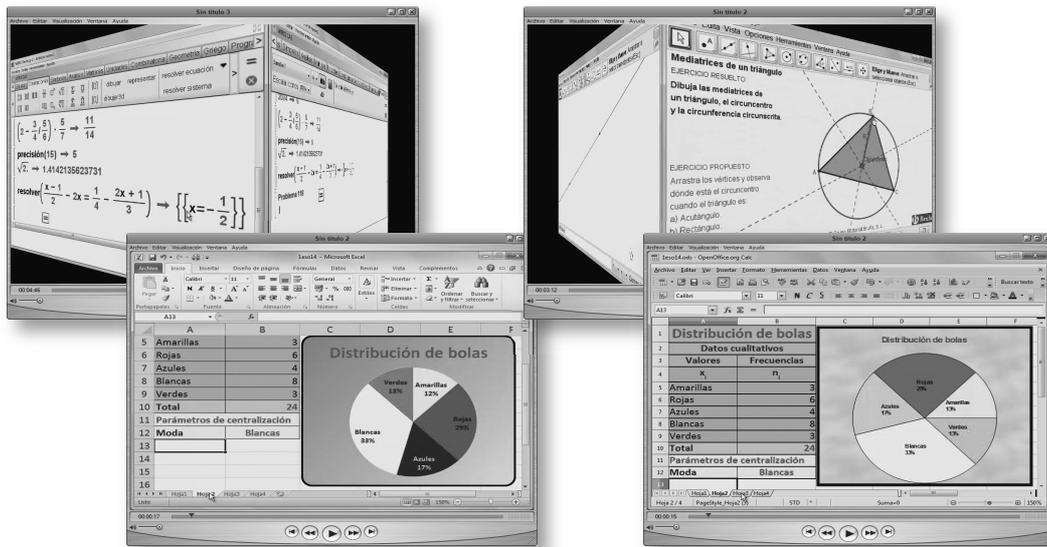
- **Tutoriales de cada unidad de Wiris, GeoGebra, Excel o Calc**

Se da una herramienta virtual en la que se explica de forma concreta el funcionamiento del programa correspondiente aplicado a los contenidos de la unidad.



• **Tutoriales generales de Wiris, GeoGebra, Excel y Calc**

Son herramientas virtuales, una para cada programa, en la que se da una visión completa y detallada del funcionamiento de cada uno de ellos.



Enlaces a páginas web: Son vínculos a páginas de **Internet** que pueden servir de complemento a los contenidos tratados.

Galería de imágenes: Es una selección de imágenes relativas a los contenidos desarrollados en las unidades didácticas, a veces con apoyo de texto explicativo, que pueden ampliarse para una visualización más detallada.

Glosario de términos: Breve diccionario con los términos fundamentales del vocabulario propio de la materia.

Actividades interactivas: El uso de las TIC con fines didácticos se potencia a través de las actividades interactivas. Para ello, el libro electrónico incorpora actividades de dos tipos: de desarrollo de unidad y de autoevaluación.

- Las **actividades interactivas de desarrollo de las unidades didácticas** corresponden al Taller Digital.
- Las **actividades interactivas de autoevaluación** o comprobación de lo aprendido consisten en preguntas de opción múltiple.

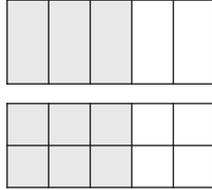
SOLUCIONARIO BLOQUE I.
ARITMÉTICA

1. Números racionales e irracionales

1. FRACCIONES

PIENSA Y CALCULA

Escribe la fracción que corresponde a cada una de las partes coloreadas de verde en las figuras del margen. ¿Representan la misma cantidad?



CARNÉ CALCULISTA

Calcula con dos decimales: $47,92 : 5,6$

$C = 8,55; R = 0,04$

1. Calcula mentalmente el M.C.D. de:

- a) 8 y 12 b) 6 y 9 c) 10 y 15 d) 8 y 24

- a) 4 b) 3 c) 5 d) 8

2. Halla el M.C.D. de:

- a) 54 y 90 b) 80 y 120
c) 270 y 630 d) 225 y 360

- a) 18 b) 40 c) 90 d) 45

3. Calcula mentalmente el m.c.m. de:

- a) 4 y 6 b) 5 y 10 c) 8 y 12 d) 15 y 20

- a) 12 b) 10 c) 24 d) 60

4. Halla el m.c.m. de:

- a) 12 y 30 b) 60 y 90 c) 140 y 350 d) 150 y 225

- a) 60 b) 180 c) 700 d) 450

5. De las siguientes fracciones di cuáles son equivalentes:

$\frac{2}{6}$ $\frac{8}{28}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{10}{30}$

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = \frac{10}{30}$

$\frac{8}{28} = \frac{4}{7}$

6. Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones:

$\frac{5}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{6}{5}$

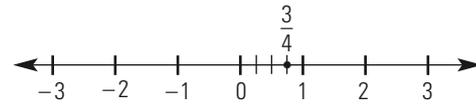
$\frac{5}{2} = \frac{150}{60}$, $\frac{2}{3} = \frac{40}{60}$, $\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$, $\frac{6}{5} = \frac{72}{60}$

$\frac{5}{2} > \frac{6}{5} > \frac{3}{4} > \frac{2}{3}$

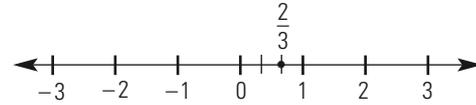
7. Halla la fracción irreducible y represéntala en la recta:

- a) $\frac{12}{16}$ b) $\frac{8}{12}$ c) $\frac{32}{24}$ d) $\frac{8}{40}$

a) $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$



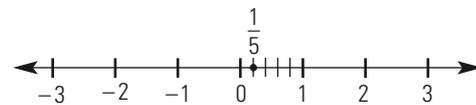
b) $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$



c) $\frac{32}{24} = \frac{4}{3}$



d) $\frac{8}{40} = \frac{1}{5}$



8. Dos barras de acero que miden, respectivamente, 105 cm y 135 cm de longitud deben ser cortadas en trozos iguales. ¿Cuál será la mayor longitud que pueden tener dichos trozos?

$M.C.D.(105,135) = 15$

La longitud será de 15 cm

2. OPERACIONES CON FRACCIONES

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente las siguientes operaciones:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{5} \cdot (-10)$

- a) $3/4$ b) $1/4$ c) -6

CARNÉ CALCULISTA

Calcula: $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{6} : \frac{4}{7} = \frac{11}{6}$

9. Calcula mentalmente:

a) $\frac{1}{4} + 2$ b) $3 - \frac{1}{2}$ c) $4 \cdot \frac{5}{6}$

- a) $9/4$ b) $5/2$ c) $10/3$

10. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{2}{3} - \frac{5}{6} + \frac{7}{4}$ b) $\frac{4}{9} + \frac{7}{15} - \frac{2}{5}$

c) $\frac{5}{8} - \frac{7}{12} + \frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{70} + \frac{6}{35} - \frac{4}{7}$

- a) $19/12$ b) $23/45$ c) $7/24$ d) $-5/14$

11. Multiplica las siguientes fracciones:

- a) $\frac{7}{9} \cdot \frac{12}{5}$ b) $25 \cdot \frac{7}{15}$ c) $12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4}$
 a) 28/15 b) 35/3 c) 3/2

12. Haz las siguientes divisiones:

- a) $\frac{8}{3} : \frac{5}{4}$ b) $\frac{24}{5} : 48$ c) $\frac{7}{18} : \frac{1}{6}$
 a) 32/15 b) 1/10 c) 7/3

13. Realiza las siguientes operaciones combinadas:

- a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{4} + \frac{2}{3} : \frac{1}{12}$ b) $\frac{5}{12} \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{15} : \frac{4}{5}$
 c) $\frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{6} \right) + \frac{5}{4}$ d) $\left(\frac{2}{5} - 1 \right) : \frac{2}{15} + \frac{11}{4}$
 a) 17/2 b) 3/8 c) 11/12 d) -7/4

14. Un camión puede cargar 12 000 kg y lleva 3/5 de la carga. ¿Cuántos kilos lleva?

$$\frac{3}{5} \cdot 12\,000 = 7\,200 \text{ kg}$$

15. De un depósito de 1 500 L se sacan 1/6 del depósito y 750 L más. ¿Qué fracción queda?

$$\text{Se sacan: } \frac{1}{6} \cdot 1\,500 + 750 = 1\,000 \text{ L}$$

$$\text{Quedan: } 1\,500 - 1\,000 = 500 \text{ L}$$

$$\text{Fracción que queda: } 500/1\,500 = 1/3$$

**3. PASO ENTRE FRACCIONES Y DECIMALES
PIENSA Y CALCULA**

Pasa mentalmente las fracciones a decimales y los decimales a fracciones:

- a) 3 : 2 b) 7 : 4 c) 1,5 d) 0,3̄
 a) 1,5 b) 1,75 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{1}{3}$

CARNÉ CALCULISTA

Calcula con dos decimales: 6 783,5 : 8,34

$$C = 813,36; R = 0,0776$$

16. Calcula mentalmente la expresión decimal de las siguientes fracciones:

- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{5}$
 a) 0,25 b) 1,5 c) 0,6̄ d) 0,4

17. Calcula mentalmente la fracción de los siguientes números decimales:

- a) 0,75 b) 1,6̄ c) 0,3̄ d) 2,5
 a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{5}{2}$

18. Halla la expresión decimal de las siguientes fracciones y clasifica el cociente obtenido:

- a) $\frac{8}{3}$ b) $\frac{67}{15}$ c) $\frac{28}{4}$ d) $\frac{39}{20}$

- a) 2,6̄ decimal periódico puro.
 b) 4,46̄ decimal periódico mixto.
 c) 7 entero.
 d) 1,95 decimal exacto.

19. Halla el lado de un triángulo equilátero cuyo perímetro mide 26 cm. ¿Cómo es el decimal obtenido?

$$\text{Lado: } \frac{26}{3} = 8,6̄$$

El decimal que se obtiene es periódico puro.

20. Clasifica en fracción ordinaria o decimal las siguientes fracciones:

- a) $\frac{7}{5}$ b) $\frac{13}{20}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{5}{6}$
 a) Decimal. b) Decimal.
 c) Ordinaria. d) Ordinaria.

21. Expresa en forma de fracción los siguientes números decimales:

- a) 3,75 b) 2,83̄ c) 2,36̄
 a) $\frac{15}{4}$ b) $\frac{17}{6}$ c) $\frac{26}{11}$

22. Expresa en forma de fracción los siguientes números decimales:

- a) 4,285714̄ b) 2,125 c) 2,681̄
 a) $\frac{30}{7}$ b) $\frac{17}{8}$ c) $\frac{59}{22}$

23. Expresa en forma de fracción y calcula:

- a) $2,4 + 1,5 \cdot 0,2$ b) $1,3 + 3,16̄$

$$\text{a) } \frac{12}{5} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{27}{10} = 2,7$$

$$\text{b) } \frac{4}{3} + \frac{19}{6} = \frac{9}{2} = 4,5$$

4. NÚMEROS REALES

PIENSA Y CALCULA

Dados los catetos de los siguientes triángulos rectángulos, calcula la hipotenusa. Si el resultado es un número entero, calcula mentalmente la raíz; si no lo es, déjalo en forma de raíz cuadrada.

- a) b = 3 m, c = 4 m b) b = 1 m, c = 1 m
 a) 5 m b) $\sqrt{2}$ m

CARNÉ CALCULISTA

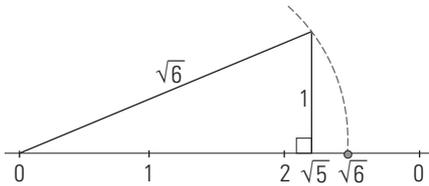
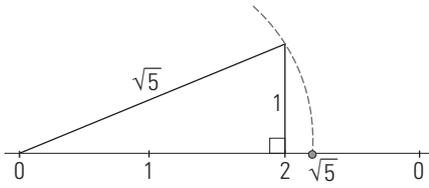
$$\text{Calcula: } \frac{5}{6} \left(\frac{7}{4} - \frac{5}{6} \right) = \frac{55}{72}$$

24. Clasifica los siguientes números en racionales o irracionales:

- | | | | | | |
|---------------|-----------|---------------|-------------|-----|---------------|
| $\frac{2}{3}$ | π | -7 | $\sqrt{3}$ | 1/2 | $\sqrt[5]{7}$ |
| 2/3 | Racional. | π | Irracional. | | |
| -7 | Racional. | $\sqrt{3}$ | Irracional. | | |
| 1/2 | Racional. | $\sqrt[5]{7}$ | Irracional. | | |

25. Representa gráficamente los siguientes números irracionales:

- a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{6}$



26. Redondea a dos cifras decimales y calcula:

- a) $3,456 + 0,342 - 2,108$
 b) $15,362 \cdot 3,236$
 c) $45,875 : 3,236$
 d) $2,458 + 42,253 : 8,417$

- a) $3,46 + 0,34 - 2,11 = 1,69$
 b) $15,36 \cdot 3,24 = 49,7664$
 c) $45,88 : 3,24 = 14,16$
 d) $2,46 + 42,25 : 8,42 = 7,48$

27. Calcula el error absoluto si se redondean los siguientes números a dos cifras decimales:

- a) **3,1415** b) **0,0278** c) **1,2068** d) **5,3975**
 a) $|3,1415 - 3,14| = 0,0015$
 b) $|0,0278 - 0,03| = 0,0022$
 c) $|1,2068 - 1,21| = 0,0032$
 d) $|5,3975 - 5,40| = 0,0025$

28. Aproxima en cada caso al orden de la unidad indicada:

- a) **4,3248 a las centésimas.**
 b) **58,15 a las unidades.**
 c) **0,00482 a las milésimas.**
 d) **37,4932 a las décimas**

- a) Redondeo: 4,32
 Truncamiento: 4,32
 b) Redondeo: 58
 Truncamiento: 58
 c) Redondeo: 0,005
 Truncamiento: 0,004
 d) Redondeo: 37,5
 Truncamiento: 37,4

29. Calcula el error absoluto y el error relativo que se cometen al aproximar la anchura de una estantería en 3,5 m si la anchura es de 345 cm.

Error absoluto = $|345 - 350| = 5$

Error relativo = $\frac{5}{345} = 0,014$

30. José y Sonia han realizado en el transcurso de una actividad las siguientes aproximaciones: José aproximó por 19 m una distancia real de 20 m y Sonia, 48 m en una distancia real de 50 m. ¿Cuál de los dos ha cometido más error?

Jose:

Error absoluto = $|20 - 19| = 1$

Error relativo = $\frac{1}{20} = 0,05$

Sonia:

Error absoluto = $|50 - 48| = 2$

Error relativo = $\frac{2}{50} = 0,04$

Sonia comete menos error.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. FRACCIONES

31. Calcula mentalmente el M.C.D. de:

- a) **12 y 16** b) **6 y 15** c) **9 y 45** d) **16 y 24**
 a) 4 b) 3 c) 9 d) 8

32. Halla el M.C.D. de:

- a) **120 y 150** b) **140 y 350**
 c) **378 y 528** d) **720 y 1470**
 a) 30 b) 70 c) 6 d) 30

33. Calcula mentalmente el m.c.m. de:

- a) **5 y 6** b) **4 y 6** c) **4 y 12** d) **6 y 8**
 a) 30 b) 12 c) 12 d) 24

34. Halla el m.c.m. de:

- a) **70 y 84** b) **168 y 252**
 c) **240 y 300** d) **80 y 120**
 a) 420 b) 504 c) 1200 d) 240

35. Indica cuáles de las siguientes fracciones son equivalentes:

$\frac{8}{20}$ $\frac{35}{49}$ $\frac{10}{14}$ $\frac{10}{25}$ $\frac{2}{5}$

$\frac{8}{20} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

$\frac{35}{49} = \frac{10}{14}$

36. Ordena de mayor a menor las siguientes fracciones:

$\frac{3}{5}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{7}{4}$

$\frac{3}{5} = \frac{36}{60}$, $\frac{5}{6} = \frac{50}{60}$, $\frac{3}{2} = \frac{90}{60}$, $\frac{7}{4} = \frac{105}{60}$

$\frac{7}{4} > \frac{3}{2} > \frac{5}{6} > \frac{3}{5}$

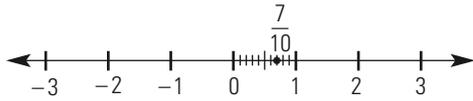
37. Halla la fracción irreducible y representa en la recta:

- a) $\frac{18}{30}$ b) $\frac{42}{60}$ c) $\frac{12}{36}$ d) $\frac{15}{9}$

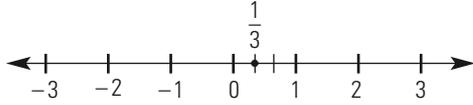
a) $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$



b) $\frac{42}{60} = \frac{7}{10}$



c) $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$



d) $-\frac{15}{9} = -\frac{5}{3}$



38. Una bombilla roja se enciende cada 120 segundos, y otra bombilla azul, cada 45 segundos. Si se encienden a la vez y comenzamos a contar, ¿cuántas veces coincidirán encendidas en una hora?

m.c.m. (45,120) = 360
 360 segundos = 360 : 60 = 6 minutos.
 En una hora coincidirán: 60 : 6 = 10 veces.

39. De una determinada cantidad de dinero, Manuel ha recibido $\frac{2}{5}$ y Sofía $\frac{5}{8}$. ¿Cuál de ellos ha recibido más cantidad de dinero?

$\frac{2}{5} = \frac{16}{40}$, $\frac{5}{8} = \frac{25}{40}$

$\frac{5}{8} > \frac{2}{5} \Rightarrow$ Sofía ha recibido más dinero que Manuel.

2. OPERACIONES CON FRACCIONES

40. Calcula mentalmente:

a) $3 - \frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4} + 2$

c) $\frac{2}{5} + \frac{3}{10}$ d) $\frac{2}{3} - \frac{1}{9}$

- a) 5/2 b) 9/4
 c) 7/10 d) 5/9

41. Calcula mentalmente:

a) $\frac{7}{5} + \frac{1}{5} + \frac{3}{5}$ b) $\frac{8}{9} + \frac{2}{9} - \frac{5}{9}$

- a) 11/5 b) 5/9

42. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{5}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2}$ b) $\frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{4}{5}$

c) $\frac{5}{9} - \frac{4}{45} + \frac{7}{15}$ d) $\frac{7}{60} + \frac{8}{15} - \frac{3}{8}$

- a) 25/12 b) 37/60
 c) 14/15 d) 11/40

43. Calcula:

a) $\frac{9}{5} - 6 + \frac{13}{15}$

b) $2 - \frac{4}{3} - \frac{3}{8} + \frac{5}{6}$

- a) -10/3 b) 9/8

44. Multiplica las siguientes fracciones:

a) $\frac{3}{8} \cdot \frac{16}{5}$ b) $\frac{4}{7} \cdot \frac{25}{28}$ c) $35 \cdot \frac{4}{15}$ d) $\frac{5}{12} \cdot 4$

- a) 6/5 b) 25/49 c) 28/3 d) 5/3

45. Haz las siguientes divisiones:

a) $\frac{4}{9} : \frac{8}{15}$ b) $\frac{12}{25} : \frac{3}{10}$ c) $\frac{14}{15} : 28$ d) $24 : \frac{56}{5}$

- a) 5/6 b) 8/5 c) 1/30 d) 15/7

46. Realiza las siguientes operaciones combinadas:

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{10}{3} + \frac{1}{4} : \frac{5}{8}$ b) $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} - \frac{7}{12} : \frac{5}{4}$

c) $\frac{5}{3} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6} \right)$ d) $\frac{5}{9} - \left(\frac{2}{27} - 1 \right) : \frac{7}{3}$

- a) 26/15 b) 7/30 c) 17/12 d) 20/21

47. Una finca de 405 ha tiene sembrados $\frac{1}{3}$ de trigo y $\frac{2}{5}$ de cebada. ¿Cuántas hectáreas se han dedicado a cada cereal?

$\frac{1}{3} \cdot 405 = 135$ ha de trigo.
 $\frac{2}{5} \cdot 405 = 162$ ha de cebada.

48. Un dependiente ha vendido $\frac{2}{7}$ partes de una pieza de lona para toldos, y otro dependiente ha vendido $\frac{1}{5}$ del resto. ¿Qué fracción de la pieza se ha vendido y qué fracción queda sin vender?

Se ha vendido: $\frac{2}{7} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3}{7}$

Queda sin vender: $\frac{4}{7}$

3. PASO ENTRE FRACCIONES Y DECIMALES

49. Calcula mentalmente la expresión decimal de las siguientes fracciones:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{4}{5}$

- a) 0,75 b) 2,5 c) $0,\bar{3}$ d) 0,8

50. Calcula mentalmente la fracción de los siguientes números decimales:

a) 0,25 b) 1,5 c) 0,6 d) 0,4

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{2}{5}$

51. Halla la expresión decimal de las siguientes fracciones y clasifica el cociente obtenido:

a) $\frac{32}{15}$ b) $\frac{12}{3}$ c) $\frac{17}{4}$ d) $\frac{24}{13}$

- a) $2,\bar{13}$ decimal periódico mixto.
 b) 4 entero.

- c) 4,25 decimal exacto.
 d) $1,84\overline{6153}$ decimal periódico puro.

52. Clasifica en fracción ordinaria o decimal las siguientes fracciones:

- a) $\frac{25}{6}$ b) $\frac{22}{7}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{29}{12}$

- a) Ordinaria. b) Ordinaria.
 c) Decimal. d) Ordinaria.

53. Expresa en forma de fracción los siguientes números decimales:

- a) $2,1\overline{5}$ b) $0,6\overline{81}$ c) $1,2$

- a) $\frac{71}{33}$ b) $\frac{15}{22}$ c) $\frac{6}{5}$

54. Expresa en forma de fracción los siguientes números decimales:

- a) $1,3\overline{571428}$ b) $2,8$ c) $5,3\overline{6}$

- a) $\frac{19}{14}$ b) $\frac{14}{5}$ c) $\frac{59}{11}$

55. Expresa en forma de fracción y calcula:

- a) $3,5 + 1,25 \cdot 0,4$ b) $1,6 + 1,8$

- a) $\frac{7}{2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{5} = 4$ b) $\frac{5}{3} + \frac{17}{9} = \frac{32}{9} = 3,5$

4. NÚMEROS REALES

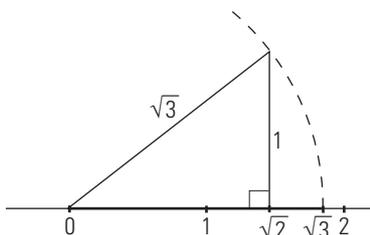
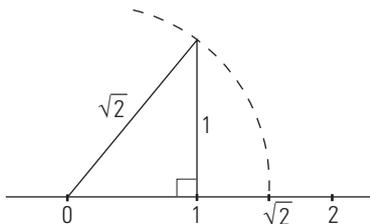
56. Clasifica como racionales o irracionales los siguientes números:

- $\frac{4}{5}$ π 6 $\sqrt{9}$ $\frac{1}{7}$ $\sqrt[3]{2}$

- $\frac{4}{5}$ Racional.
 π Irracional.
 6 Racional.
 $\sqrt{9} = \pm 3$ Racional.
 $\frac{1}{7}$ Racional.
 $\sqrt[3]{2}$ Irracional.

57. Representa gráficamente los siguientes números irracionales:

- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$



58. Calcula el error absoluto si se redondean a dos cifras decimales los siguientes números:

- a) 6,4135
 b) 0,0785
 c) 4,9084
 d) 7,0985

- a) $|6,4135 - 6,41| = 0,0035$
 b) $|0,0785 - 0,08| = 0,0015$
 c) $|4,9084 - 4,91| = 0,0016$
 d) $|7,0985 - 7,1| = 0,0015$

59. Redondea a dos cifras decimales y calcula:

- a) $23,567 + 0,413 - 12,085$
 b) $0,624 \cdot 1,368$
 c) $5,575 : 8,361$
 d) $28,508 + 12,534 : 4,197$

- a) $23,57 + 0,41 - 12,09 = 11,89$
 b) $0,62 \cdot 1,37 = 0,8494$
 c) $5,58 : 8,36 = 0,67$
 d) $28,51 + 12,53 : 4,20 = 31,49$

60. Calcula el área de un círculo de radio 2 m y redondea el resultado a metros cuadrados. ¿Qué error absoluto se comete?

$A = \pi \cdot 2^2 = 12,56637 \text{ m}^2 \approx 13 \text{ m}^2$
 Error absoluto = $|12,56637 \dots - 13| = 0,43363$

Error relativo = $\frac{0,43363}{12,56637} = 0,034507$

PARA AMPLIAR

61. Halla el M.C.D. de:

- a) 28 y 360
 b) 105 y 168
 c) 40, 105 y 160
 d) 75, 120 y 210

- a) 4 b) 21 c) 5 d) 15

62. Calcula el m.c.m. de:

- a) 50, 140 b) 180 y 264
 c) 54, 126 y 180 d) 48, 160 y 300

- a) 700 b) 3 960 c) 3 780 d) 2 400

63. En un teatro han vendido $\frac{11}{12}$ partes del total del aforo. Al día siguiente, se vendieron $\frac{4}{5}$ partes del aforo. ¿Qué día se llenó más el teatro?

$\frac{11}{12} = \frac{55}{60}$, $\frac{4}{5} = \frac{48}{60}$

$\frac{11}{12} > \frac{4}{5} \Rightarrow$ Se llenó más el primer día.

64. Escribe las fracciones representadas en la recta



a) $-1,5 = -\frac{15}{10} = -\frac{3}{2}$

d) $0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

c) $2,3 = \frac{23}{10}$

65. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{5}{8} - \frac{7}{16} + 1$ b) $\frac{5}{6} - 1 + \frac{2}{15}$
 c) $\frac{1}{3} - \left(\frac{4}{15} + \frac{7}{5}\right)$ d) $\left(\frac{5}{9} - \frac{1}{18}\right) + \frac{3}{2}$
 a) 19/16 b) -1/30 c) -4/3 d) 2

66. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{12}{5} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{5}{9}$ b) $\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{15}{2}$
 c) $\frac{4}{15} \cdot \frac{5}{3} : \frac{4}{5}$ d) $\frac{2}{3} : \frac{5}{12} \cdot \frac{25}{18}$
 a) 7/3 b) 25/7 c) 5/9 d) 20/9

67. Opera y simplifica:

a) $\frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{7}{8}$ b) $\frac{5}{24} - \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3}$
 c) $\frac{3}{8} \left(\frac{7}{12} - \frac{1}{4}\right)$ d) $\left(\frac{2}{15} + \frac{7}{12}\right) : \frac{5}{12}$
 a) 19/8 b) -5/24 c) 1/8 d) 43/25

68. Calcula:

a) $\left(\frac{4}{3} - \frac{11}{12}\right) \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right)$
 b) $\left(1 - \frac{2}{5}\right) : \left(\frac{11}{10} - 2\right)$
 a) 5/24 b) -2/3

69. Haz las operaciones siguientes:

a) $\frac{2}{3} : \frac{5}{4} - 2 \left(1 + \frac{1}{2}\right)$
 b) $\frac{3}{4} \cdot 5 \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}$
 a) -37/15 b) 27/8

70. Tenemos 30 sacos de harina de 85 kg cada uno y gastamos 2/5. ¿Cuántos kilos quedan?

Quedan: $\frac{3}{5} \cdot 30 \cdot 85 = 1530$ kg

71. Se vendieron las 3/5 partes de un solar y, posteriormente, 4/5 partes de lo que quedaba. ¿Qué fracción queda sin vender?

Se vende: $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{23}{25}$
 Queda: 2/25

72. Expresa como decimal las siguientes fracciones y clasifica los decimales en exactos, periódicos puros o periódicos mixtos:

a) $\frac{3}{20}$ b) $\frac{8}{25}$ c) $\frac{45}{15}$
 d) $\frac{24}{7}$ e) $\frac{13}{30}$ f) $\frac{16}{25}$

- a) 0,15 Decimal exacto.
- b) 0,32 Decimal exacto.
- c) 3 Número entero.
- d) $3,42857\overline{1}$ Decimal periódico puro.
- e) $0,4\overline{3}$ Decimal periódico mixto.
- f) 0,64 Decimal exacto.

73. Calcula redondeando previamente a dos cifras decimales:

a) $\frac{1}{3} + 2,45 \cdot (2,753 - 3,257) + \frac{1}{4}$
 b) $0,659 - \frac{1}{2} + 1,57 : \left(3,75 - \frac{2}{3}\right)$
 c) $3,567 + 2,5(3,349 - 2,005)$
 d) $85,247 : 5,658$

- a) $0,33 + 2,45(2,75 - 3,26) + 0,25 = -0,67$
- b) $0,66 - 0,5 + 1,57 : (3,75 - 0,67) = 0,67$
- c) $3,57 + 2,5(3,35 - 2,01) = 6,92$
- d) $85,25 : 5,66 = 15,06$

74. Calcula el error absoluto si se redondean a dos cifras decimales los siguientes números:

a) 18,134 b) 0,348 c) 3,908 d) 9,095
 a) $|18,134 - 18,13| = 0,004$ b) $|0,348 - 0,35| = 0,002$
 c) $|3,908 - 3,91| = 0,002$ d) $|9,095 - 9,1| = 0,005$

75. Calcula el área de una sala que tiene 6,5 m de anchura por 9,2 m de larga. Redondea a metros cuadrados y explica si el error cometido es muy grande.

$A = 6,5 \cdot 9,2 = 59,8$ m²
 Error absoluto = $|59,8 - 59| = 0,8$
 Error relativo = $\frac{0,8}{59,8} = 0,013378$

76. Efectúa las siguientes sumas y restas:

a) $\frac{3}{4} + 2 - \frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{2} + \frac{4}{3} - \frac{7}{6}$
 c) $\frac{3}{2} - \frac{11}{6} - \frac{5}{4}$ d) $\frac{4}{9} - 1 + \frac{5}{6}$
 a) $\frac{23}{12}$ b) $\frac{8}{3}$ c) $-\frac{19}{12}$ d) $\frac{5}{18}$

77. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\left(2 - \frac{5}{7}\right) \frac{14}{3}$ b) $\left(\frac{3}{5} + 3\right) \left(2 - \frac{2}{3}\right)$
 c) $\left(\frac{7}{6} - 2\right) : \frac{3}{4}$ d) $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right)$
 b) $\frac{24}{5}$ a) 6 c) $-\frac{10}{9}$ d) $-\frac{3}{4}$

78. Calcula:

a) $\frac{7}{5} \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{5} : \frac{3}{10}$ b) $\frac{3}{4} : \frac{5}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$
 c) $\frac{3}{5} : \frac{3}{10} - \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5}$ d) $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} : \frac{7}{10}$
 a) $-\frac{19}{20}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{15}{14}$

79. Efectúa:

a) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\right) : \frac{10}{3}$

b) $\left(\frac{3}{4} - \frac{4}{3}\right) : \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{6}\right)$

c) $\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{4}\right) : \frac{3}{10}$

d) $\left(2 - \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right)$

a) $\frac{1}{6}$

b) $-\frac{7}{8}$

c) $-\frac{11}{6}$

d) $\frac{14}{17}$

80. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{3}{5} - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right)$

b) $\frac{4}{9} \left(\frac{7}{6} - \frac{5}{4}\right)$

c) $\frac{3}{4} - \frac{5}{6} : \frac{2}{9}$

d) $\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\right) : \frac{5}{6}$

a) $\frac{1}{3}$

b) $-\frac{1}{27}$

c) -3

d) $\frac{7}{10}$

81. Calcula:

a) $\frac{7}{11} : \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{22}\right)$

b) $\left(\frac{4}{3} - 2 + \frac{5}{6}\right) \frac{7}{4}$

c) $\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right) \left(\frac{4}{5} + 2\right)$

d) $\left(\frac{5}{3} - 2\right) \left(\frac{5}{6} + \frac{9}{4}\right)$

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{7}{24}$

c) $-\frac{7}{15}$

d) $-\frac{37}{36}$

82. Efectúa:

a) $\left(\frac{1}{4} - 2 + \frac{1}{12}\right) : \left(\frac{5}{12} - \frac{4}{3}\right)$

b) $\left(\frac{5}{6} - \frac{3}{2}\right) : \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{3}\right)$

c) $2 - \left(\frac{5}{3} - \frac{7}{4}\right) : \frac{5}{12}$

d) $\left(\frac{3}{4} - 2\right) \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{15}\right) : \frac{7}{30}$

a) $\frac{20}{11}$

b) $\frac{8}{11}$

c) $\frac{11}{5}$

d) $-\frac{25}{14}$

83. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} : \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{6}\right)$

b) $\frac{5}{4} - \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\right)$

c) $\frac{2}{3} - \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right) \left(\frac{4}{3} - 3\right)$

d) $\frac{11}{6} - \frac{2}{9} : \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right)$

a) $\frac{19}{30}$

b) $\frac{9}{4}$

c) $\frac{29}{36}$

d) $\frac{19}{6}$

84. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $5 - \frac{14}{3} \cdot \frac{9}{7} - \frac{3}{2} : \frac{7}{2}$

b) $\left(\frac{3}{4} - \frac{5}{2}\right) : \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{6}$

c) $\frac{1}{9} : \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right) - \left(\frac{5}{4} - \frac{7}{12}\right)$

d) $\frac{3}{4} : \frac{5}{2} + \frac{5}{4} : \left(\frac{2}{3} + 1 - \frac{5}{6}\right)$

a) $-\frac{10}{7}$

b) $-\frac{11}{6}$

c) -2

d) $\frac{9}{5}$

85. Calcula:

a) $\left(\frac{7}{6} - \frac{10}{3}\right) \frac{9}{5} + \frac{14}{3} : \frac{7}{12}$

b) $\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) \left(\frac{7}{4} - \frac{5}{3}\right) : \frac{2}{9}$

c) $\frac{1}{4} : \left(3 - \frac{3}{8}\right) : \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2}\right)$

d) $\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{9} + \frac{3}{2} : \left(\frac{1}{8} + 1 - \frac{3}{4}\right)$

a) $\frac{41}{10}$

b) $\frac{5}{16}$

c) $-\frac{8}{21}$

d) $\frac{14}{3}$

86. Calcula:

a) $\frac{2}{3} : \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{6}\right) \left(\frac{7}{6} - 2 + \frac{1}{3}\right)$

b) $\frac{3}{7} - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{3}{4} + 1 - \frac{7}{6}\right)$

c) $\left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right) \left(\frac{3}{4} + 5 - \frac{1}{2}\right)$

d) $\frac{4}{9} \left(\frac{2}{3} + 2 - \frac{1}{6}\right) : \frac{2}{9}$

a) $-\frac{1}{7}$

b) $\frac{9}{7}$

c) $\frac{7}{16}$

d) 5

87. Halla la expresión decimal de las siguientes fracciones:

a) $\frac{59}{11}$

b) $\frac{14}{5}$

c) $\frac{31}{6}$

a) $5,3\overline{6}$

b) $2,8$

c) $5,1\overline{6}$

88. Expresa en forma de fracción los siguientes números decimales:

a) $4,8\overline{3}$

b) $2,75$

c) $4,6\overline{}$

a) $\frac{29}{6}$

b) $\frac{11}{4}$

c) $\frac{14}{3}$

89. Halla la expresión decimal de las siguientes fracciones:

a) $\frac{13}{2}$

b) $\frac{55}{12}$

c) $\frac{45}{7}$

a) $6,5$

b) $4,58\overline{3}$

c) $6,42857\overline{1}$

90. Expresa en forma de fracción los siguientes números decimales:

- a) $9,69230\overline{7}$ b) $6,91\overline{6}$ c) $1,75$
 a) $\frac{126}{13}$ b) $\frac{83}{12}$ c) $\frac{7}{4}$

91. Halla la expresión decimal de las siguientes fracciones:

- a) $\frac{51}{16}$ b) $\frac{36}{11}$ c) $\frac{13}{6}$
 a) $3,1875$ b) $3,2\overline{7}$ c) $2,1\overline{6}$

92. Expresa en forma de fracción los siguientes números decimales:

- a) $2,38461\overline{5}$ b) $2,16$ c) $1,295\overline{4}$
 a) $\frac{31}{13}$ b) $\frac{54}{25}$ c) $\frac{57}{44}$

93. Calcula pasando a fracción

- a) $2,6 + 0,3$
 b) $4,1\overline{7} + 5,8\overline{2}$
 a) $2,6 + 0,3 = \frac{24}{9} + \frac{1}{3} = \frac{27}{9} = 3$
 b) $4,1\overline{7} + 5,8\overline{2} = \frac{413}{99} + \frac{577}{99} = \frac{990}{99} = 10$

94. Redondea las siguientes medidas y calcula el error que se comete:

- a) **A kilómetros, la distancia entre dos ciudades, que es de 48,25 km**
 b) **A gramos, la masa de una manzana, que es de 172,6 g**
 c) **A miles de euros, el premio de una lotería, que es 25 642 €**
 d) **A litros, el contenido de agua de una garrafa, que es 10,5 L**

a) 48 km
 Error absoluto = $|48,25 - 48| = 0,25$

Error relativo = $\frac{0,25}{48,25} = 0,0051813$

b) 172 g
 Error absoluto = $|172,6 - 172| = 0,6$

Error relativo = $\frac{0,6}{172,6} = 0,003476$

c) 25 642 €
 Error absoluto = $|25\ 642 - 25\ 000| = 642$

Error relativo = $\frac{642}{25\ 642} = 0,025$

d) 10,5 L
 Error absoluto = $|10,5 - 10| = 0,5$

Error relativo = $\frac{0,5}{10,5} = 0,0476$

CON CALCULADORA

95. Calcula:

- a) $\frac{3}{20} + \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{15}$

b) $\frac{5}{4} \cdot \frac{16}{9} - \frac{5}{18}$

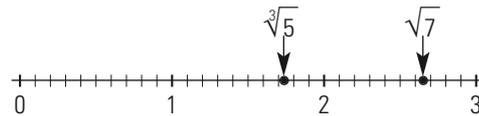
c) $\frac{2}{15} \left(5 - \frac{7}{10} \right)$

d) $\left(\frac{11}{5} - 3 \right) : \frac{3}{10}$

- a) $5/24$ b) $35/18$ c) $43/75$ d) $-8/3$

96. Calcula las siguientes raíces con la calculadora y represéntalas por aproximación en la recta real:

- a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt[3]{5}$
 a) 2,65 b) 1,71



PROBLEMAS

97. Se desea cubrir con baldosas cuadradas una superficie rectangular de 90 cm de ancho y 300 cm de largo. ¿Cuál será la mayor longitud que debe tener el lado de las baldosas para cubrir toda la superficie? ¿Cuántas baldosas se necesitan?

M.C.D. (90, 300) = 30 cm
 $300 : 30 = 10$
 $90 : 30 = 3$
 $10 \cdot 3 = 30$ baldosas.

98. Un comerciante quiere hacer lotes de igual tamaño de tres tipos de aceite, para agotar las existencias de tres depósitos que tienen 680 L, 600 L y 728 L. ¿Cuál es el mayor número de litros que puede envasar en cada lote? ¿Cuántos lotes hará?

M.C.D. (680, 600, 728) = 8 L.
 N.º de lotes: $(680 + 600 + 728) : 8 = 251$

99. En una carrera de obstáculos se quiere colocar una valla cada 40 m y una rampa cada 70 m. ¿Qué longitud mínima debe tener la pista de la carrera para que en la meta coincidan los dos obstáculos?

m.c.m. (40, 70) = 280 m

100. Dos cometas se pueden observar cada 50 años y cada 90 años, respectivamente. Si se han observado juntos en el año 2010, ¿cuándo se volverán a ver juntos?

m.c.m. (50, 90) = 450 años.
 Se observarán en el año 2460

101. En el cumpleaños de Alba se comieron $2/3$ de una caja de bombones; al día siguiente, $2/3$ de lo que quedaba, y aún quedan seis bombones. ¿Cuántos bombones tenía la caja?

Se han comido: $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$

Quedan: 6 bombones que son $\frac{1}{9}$

La caja tenía $6 : \frac{1}{9} = 6 \cdot 9 = 54$ bombones.

- 102. Rubén dispone de 1000 € y decide hacer un donativo de 3/10 para una organización de ayuda al Tercer Mundo y de 2/5 de lo que le queda a otra organización. ¿Cuánto dinero le queda?**

$$\text{Fracción que le queda: } 1 - \left(\frac{3}{10} + \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{10} \right) = \frac{21}{50}$$

$$\text{Dinero que le queda: } \frac{21}{50} \cdot 1000 = 420 \text{ €}$$

- 103. En una ciudad hay 12 500 trabajadores de los que 5/20 trabajan en el sector primario, 7/50 en sector secundario y el resto en el sector terciario. ¿Cuántos trabajadores hay en cada sector?**

$$\text{Sector primario: } \frac{5}{20} \cdot 12\,500 = 3\,125$$

$$\text{Sector secundario: } \frac{7}{50} \cdot 12\,500 = 1\,750$$

$$\text{Sector terciario: } 12\,500 - (3\,125 + 1\,750) = 7\,625$$

- 104. Un depósito lleno contiene 5 400 L. Se extrae 1/4 de su capacidad y, posteriormente, se gastan 675 L. ¿Qué fracción de la capacidad del depósito queda en él?**

$$\text{Se extrae: } \frac{1}{4} \cdot 5\,400 = 1\,350 \text{ litros}$$

$$1\,350 + 675 = 2\,025 \text{ litros}$$

$$\text{Fracción que gasta: } \frac{2\,025}{5\,400} = \frac{3}{8}$$

$$\text{Fracción que queda: } \frac{5}{8}$$

- 105. Un almacén de pinturas utiliza 2/3 de la superficie para almacenar pinturas, 1/4 del resto para disolventes y los 600 m² restantes para utensilios de pintura. ¿Cuántos metros cuadrados tiene el almacén?**

$$\text{Pinturas más disolventes: } \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Utensilios: } 600 \text{ m}^2 \text{ que corresponden a } \frac{1}{4}$$

$$\text{Total: } 600 : \frac{1}{4} = 600 \cdot 4 = 2\,400 \text{ m}^2$$

- 106. En una caseta de la fiesta del centro escolar, los 5/6 del dinero que se ha cobrado en un día corresponden a la venta de refrescos. De este dinero, los 4/7 corresponden a la venta de refrescos de cola. Si la venta de refrescos de cola ha sido de 90 €, ¿cuál habrá sido la recaudación de la caseta por la venta de refrescos?**

$$\text{Fracción de la venta de cola: } \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{21}$$

Recaudación de refrescos:

$$90 : \frac{10}{21} = 90 \cdot \frac{21}{10} = 189 \text{ €}$$

- 107. De un terreno se han vendido 2/3 de su superficie, y después 1/5 del resto, quedando 4 ha sin vender. ¿Cuál era la superficie del terreno?**

Fracción que queda sin vender:

$$1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{15}$$

$$\text{Superficie total: } 4 : \frac{4}{15} = 4 \cdot \frac{15}{4} = 15 \text{ ha}$$

- 108. Halla de forma exacta la longitud de una circunferencia de 5 cm de radio. Clasifica el resultado como número racional o irracional y exprésalo redondeando a dos decimales.**

$$L = 2\pi R$$

$$L = 2 \cdot \pi \cdot 5 = 10\pi \text{ cm}$$

Es un número irracional.

$$L = 31,42 \text{ cm}$$

PARA PROFUNDIZAR

- 109. Una pelota rebota cada vez a una altura igual a los 2/5 de la altura de la que cae. Si después de 3 botes se eleva a 0,32 m, ¿cuál es la altura desde la que cae?**

$$0,32 : \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \right) = 0,32 \cdot \frac{125}{8} = 5 \text{ m}$$

- 110. Una tela, después de lavada, se reduce en 1/5 de su longitud y en 1/16 de su anchura. ¿Qué longitud debe comprarse de una pieza de tela de 0,8 m de ancho para que, después de lavada, se tengan 84 m²?**

$$\text{La anchura después de lavada es } \frac{15}{16} \cdot 0,8 = 0,75 \text{ m}$$

$$\text{La longitud después de lavada es } 84 : 0,75 = 112 \text{ m}$$

$$\text{La longitud que ha de comprarse es } 112 : \frac{4}{5} = 140 \text{ m}$$

- 111. Se sabe que una determinada carne contiene 1/5 de hueso y que, una vez deshuesada, pierde 1/5 de su peso al ser guisada. Calcula la cantidad de carne con hueso que es necesario comprar para que, al preparar una comida para 6 personas, le corresponda a cada una 160 g de carne.**

Fracción de la carne que queda:

$$1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \right) = \frac{16}{25}$$

Hay que comprar:

$$160 \cdot 6 : \frac{16}{25} = 1\,500 \text{ g} = 1,5 \text{ kg}$$

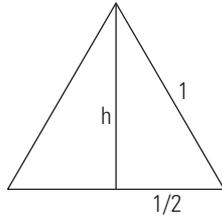
- 112. Un ordenador y una impresora cuestan conjuntamente 1 200 €. Si la impresora es 1/5 del precio del ordenador, ¿cuáles son los precios de cada uno de los dos artículos?**

$$\text{Fracción del precio conjunto: } 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\text{Precio del ordenador: } 1\,200 : \frac{6}{5} = 1\,000 \text{ €}$$

$$\text{Precio de la impresora: } 1\,200 - 1\,000 = 200 \text{ €}$$

113. Halla de forma exacta la altura de un triángulo equilátero de 1 cm de lado. Indica si el resultado es un número irracional o racional y exprésalo redondeando a dos decimales.



$$h = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

Es un número irracional.

$$h = 0,87 \text{ cm}$$

114. La suma de dos fracciones es 9/10 y la primera es el doble de la segunda. Calcula las fracciones:

Sea la fracción buscada $\frac{a}{b}$

$$\frac{2a}{b} + \frac{a}{b} = \frac{3a}{b} \Rightarrow \frac{3a}{b} = \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

Las fracciones son $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ y $\frac{3}{10}$

115. En la cuenta corriente de Coral se ha realizado un pago de 2/9 de la cantidad que había. Hemos ingresado posteriormente 1/6 de lo que queda y resulta que todavía faltan 150 € para tener la cantidad inicial. ¿Cuánto dinero había inicialmente en la cuenta corriente?

Se saca $\frac{2}{9}$ y se ingresan $\frac{1}{6} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{54}$

Los 150 € corresponden a la diferencia de lo que se saca y se ingresa:

$$\frac{2}{9} - \frac{7}{54} = \frac{5}{54}$$

$$150 : \frac{5}{54} = 150 \cdot \frac{54}{5} = 1620 \text{ €}$$

116. Calcula el menor número x que cumpla:

M.C.D. (x, 18) = 6

El número 6

117. Demuestra que la suma de tres números enteros consecutivos es múltiplo de tres.

Sean los tres números enteros consecutivos:

x

x + 1

x + 2

Se tiene:

$$x + x + 1 + x + 2 = 3x + 3 = 3(x + 1)$$

Por tanto, la suma es múltiplo de 3

APLICA TUS COMPETENCIAS

EL RECIBO DE LA LUZ

118. Nos han remitido el siguiente recibo de energía eléctrica de los dos últimos meses.

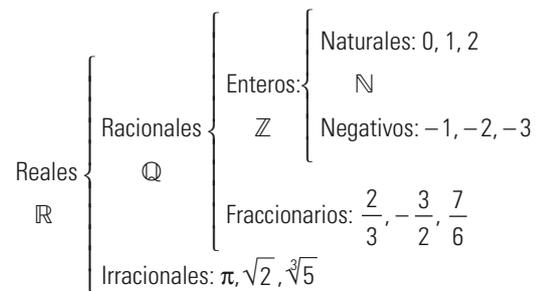
Facturación	Euros
1. Potencia contratada: 3,3 kW × 30 días × 5,5075 cent €/kWdía	
2. Energía consumida: 972 kW × 11,473 cent €/kWh	
3. Impuesto sobre Electricidad: 4,864% s 116,97 × 1,05113	
4. Alquiler de equipos de medida: 30 días × 1,874 cent €/día	
Total	
5. IVA 16%	
Importe	

Calcula los importes de cada concepto y el total de la factura.

Facturación	Euros
1. Potencia contratada: 3,3 kW × 30 días × 5,5075 cent €/kWdía	5,45 €
2. Energía consumida: 972 kW × 11,473 cent €/kWh	111,52 €
3. Impuesto sobre Electricidad: 4,864% s 116,97 × 1,05113	5,98 €
4. Alquiler de equipos de medida: 30 días × 1,874 cent €/día	0,56 €
Total	123,51 €
5. IVA 16%	19,76 €
Importe	143,27 €

COMPRUEBA LO QUE SABES

1. Escribe la clasificación de los números reales y pon tres ejemplos de cada uno de ellos.



2. Calcula:

a) M.C.D. (140, 350)

a) 70

b) m.c.m. (80, 120)

b) 240

3. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{3}{5} \left(\frac{1}{4} - \frac{7}{8} \right) + \frac{5}{4}$

a) 7/8

b) $\left(\frac{7}{12} - 1 \right) : \frac{3}{4} - \frac{5}{3}$

b) -20/9

4. Expresa como decimal las siguientes fracciones y clasifica los decimales en exactos, periódicos puros o mixtos:

a) $\frac{12}{5}$ b) $\frac{8}{9}$ c) $\frac{7}{12}$ d) $\frac{14}{27}$

- a) 2,4 Exacto.
 b) 0,8 Periódico puro.
 c) 0,58 $\bar{3}$ Periódico mixto.
 d) 0,51 $\bar{8}$ Periódico puro.

5. Expresa en forma de fracción y calcula:

a) $2,4 + 1,5 \cdot 0,2$ b) $1,3 + 3,1\bar{6}$

a) $\frac{12}{5} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{27}{10} = 2,7$ b) $\frac{4}{3} + \frac{19}{6} = \frac{9}{2} = 4,5$

6. Calcula el error absoluto y relativo al aproximar el número π a 22/7. Redondea el resultado a cuatro decimales.

Error absoluto: 0,0013 Error relativo: 0,0004

7. En el cumpleaños de Alba se comieron los 2/3 de una caja de bombones; al día siguiente, 2/3 de lo que quedaba, y aún quedan 6 bombones. ¿Cuántos bombones tenía la caja?

Se han comido: $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$

Quedan: 6 bombones que son $\frac{1}{9}$

La caja tenía 6 : $\frac{1}{9} = 6 \cdot 9 = 54$ bombones.

8. Tres sacos de café de diferente clase pesan 24 kg, 30 kg y 38 kg. Se quiere envasar todo el café en paquetes iguales del mayor peso posible. Calcula cuánto pesará cada paquete y cuántos paquetes se harán.

M.C.D.(24, 30, 38) = 2 kg

24 : 2 = 12 paquetes.

30 : 2 = 15 paquetes.

38 : 2 = 19 paquetes.

Se harán, en total, 46 paquetes de 2 kg cada paquete.

WINDOWS/LINUX 

PASO A PASO

119. Halla la descomposición factorial de 18 000

Resuelto en el libro del alumnado.

120. Halla el M.C.D y el m.c.m. de 720 y 1 200

Resuelto en el libro del alumnado.

121. Calcula: $\frac{2}{3} \left(\frac{3}{4} - 2 \right) + \frac{7}{6}$

Resuelto en el libro del alumnado.

122. Halla la expresión decimal con 15 cifras del siguiente número real y clasifícalo como decimal exacto, periódico puro, periódico mixto o irracional:

$\frac{51}{22}$

Resuelto en el libro del alumnado.

123. Halla la fracción generatriz de 2,31 $\bar{8}$

Resuelto en el libro del alumnado.

124. Halla el error absoluto y el error relativo de redondear el número $\sqrt{5}$ a dos cifras decimales

Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de WIRIS:

125. Tres aviones hacen escala en un mismo aeropuerto cada 9, 12 y 15 días, respectivamente. Si coinciden el 5 de octubre, ¿cuántos días pasarán hasta que vuelvan a coincidir por primera vez?

Resuelto en el libro del alumnado.

PRACTICA

126. Halla la descomposición factorial de:

a) 300 b) 630 c) 960 d) 1 288

a) $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

b) $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

c) $960 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5$

d) $1\,288 = 2^3 \cdot 7 \cdot 23$

127. Halla el M.C.D y el m.c.m. de:

a) 900 y 1 200 b) 75, 120 y 210

c) 1 512 y 1 575 d) 48, 160 y 300

a) M.C.D. (900, 1 200) = 300

m.c.m. (900, 1 200) = 3 600

b) M.C.D. (75, 120, 210) = 15

m.c.m. (75, 120, 210) = 4 200

c) M.C.D. (1 512, 1 575) = 63

m.c.m. (1 512, 1 575) = 37 800

d) M.C.D. (48, 160, 300) = 4

m.c.m. (48, 160, 300) = 2 400

128. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{4}{9} \left(\frac{7}{6} - \frac{5}{4} \right)$ b) $\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4} \right) : \frac{5}{6}$

a) $-\frac{1}{27}$

b) $\frac{7}{10}$

129. Expresa en forma de fracción los siguientes números decimales:

a) 3,75 b) 2,8 $\bar{3}$ c) 2,3 $\bar{6}$

a) $\frac{15}{4}$

b) $\frac{17}{6}$

c) $\frac{26}{11}$

130. Halla la expresión decimal con 15 dígitos de los siguientes números reales y clasifícalos como decimal exacto, periódico puro, periódico mixto o irracional:

a) $\frac{45}{7}$ b) $\sqrt{5}$ c) π d) $\frac{55}{8}$ e) $\frac{547}{22}$

a) 6,4285714285714 Periódico puro.

b) 2,2360679774997 Irrracional.

c) 3,1415926535897 Irrracional.

d) 6,875 Decimal exacto.

e) 24,863636363636 Periódico mixto.

131. Halla el error absoluto y relativo de redondear $\sqrt{7}$ a dos decimales.

Error absoluto: 0,0058

Error relativo: 0,0026

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris:

132. Tres ciclistas salen de un mismo punto y recorren una pista circular en 48 segundos, 56 segundos y 60 segundos, respectivamente. ¿Cuándo vuelven a encontrarse por primera vez?

m.c.m. (48, 56, 60) = 1 680 segundos = 28 minutos

133. El depósito de agua contiene 700 L. Si primero sacamos $\frac{2}{5}$ y luego $\frac{3}{7}$ del total, ¿cuántos litros quedan en el depósito?

120 litros.

134. En una caseta de la fiesta del centro escolar, los $\frac{5}{6}$ del dinero que se ha cobrado en un día corresponden a la venta de refrescos. De este dinero, los $\frac{4}{7}$ corresponden a la venta de refrescos de cola. Si la venta de refrescos de cola ha sido de 90 €, ¿cuál habrá sido la recaudación de la caseta ese día?

Fracción de la venta de cola:

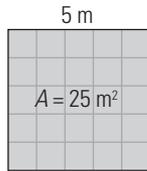
$$90 : \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{7} = 189 \text{ €}$$

2. Potencias y raíces

1. POTENCIAS DE EXPONENTE NATURAL

PIENSA Y CALCULA

Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla de cuadrados y cubos perfectos:



Número	1	2	3	4	5	6	10
Cuadrado perfecto	1	4			25		
Cubo perfecto	1	8				216	

Número	1	2	3	4	5	6	10
Cuadrado perfecto	1	4	9	16	25	36	100
Cubo perfecto	1	8	27	64	125	216	1000

CARNÉ CALCULISTA

Calcula con dos decimales: $597,81 : 4,5$

$C = 132,84; R = 0,03$

APLICA LA TEORÍA

1. Escribe en forma de potencia:

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ b) $-5 \cdot (-5) \cdot (-5)$

a) 5^4 b) $(-5)^3$

2. Calcula mentalmente:

a) 2^3 b) $(-2)^3$ c) $(-2)^4$
 d) 0^7 e) $(-7)^1$ f) $(-9)^0$

a) 8 b) -8 c) 16
 d) 0 e) -7 f) 1

3. Calcula:

a) 3^4 b) $(-3)^4$ c) 3^5 d) $(-3)^5$

a) 81 b) 81 c) 243 d) -243

4. Calcula:

a) 13^2 b) $0,25^2$ c) 17^3 d) $2,5^3$

a) 169 b) 0,0625 c) 4913 d) 15,625

5. Usando la calculadora, halla las siguientes potencias:

a) 2^{10} b) $3,75^{18}$ c) 2^{64} d) π^{10}

a) 1024 b) $2,15 \cdot 10^{10}$
 c) $1,84 \cdot 10^{19}$ d) 93648,05

6. Expresa el resultado en forma de una sola potencia utilizando las propiedades de las potencias:

a) $2^5 \cdot 2^4$ b) $5^9 : 5^3$ c) $(2^4)^3$ d) $3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4$

a) 2^9 b) 5^6 c) 2^{12} d) 3^9

7. Expresa el resultado en forma de una sola potencia utilizando las propiedades de las potencias:

a) $x^2 \cdot x^3$ b) $x^5 : x^2$ c) $(x^3)^4$ d) $x^2 \cdot x^3 \cdot x^4$

a) x^5 b) x^3 c) x^{12} d) x^9

8. Multiplica para eliminar el paréntesis:

a) $3a^2b(2ab^2 - 5a^2b^3)$

b) $2x^3y^2z(3xy^2z^2 + 4x^2yz^3 - 6x^3z^4)$

a) $6a^3b^3 - 15a^4b^4$

b) $6x^4y^4z^3 + 8x^5y^3z^4 - 12x^6y^2z^5$

9. Sacar factor común todos los factores que puedas:

a) $6a^3b^2 - 8a^4b^5$

b) $18x^2y^5z^2 + 12x^2y^3z^3 - 6x^3y^3z^4$

a) $2a^3b^2(3 - 4ab^3)$

b) $6x^2y^3z^2(3y^2 + 2z - xz^2)$

10. Se tiene un depósito de gasoil para la calefacción con forma de cubo cuya arista mide 2,25 m. Si el litro de gasoil de calefacción cuesta a 0,65 €, calcula lo que cuesta llenar el depósito.

Coste: $2,25^3 \cdot 1000 \cdot 0,65 = 7403,91$ €

2. POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO

PIENSA Y CALCULA

Expresa el resultado en forma de una sola potencia utilizando las propiedades de las potencias y calcula el resultado:

a) $2^7 : 2^4$ b) $2^5 : 2^4$ c) $2^5 : 2^5$ d) $2^4 : 2^7$

a) $2^3 = 8$ b) $2^1 = 2$ c) $2^0 = 1$ d) $2^{-3} = 1/8$

CARNÉ CALCULISTA

Calcula: $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{6} - \frac{4}{3} : \frac{8}{7} = -\frac{7}{15}$

APLICA LA TEORÍA

11. Calcula mentalmente en forma de fracción el resultado de las siguientes potencias:

a) 2^{-1} b) $(-2)^{-2}$ c) 2^{-3} d) $(-2)^{-3}$

e) 1^{-9} f) $(-5)^{-1}$ g) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$ h) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$

a) $1/2$ b) $1/4$ c) $1/8$ d) $-1/8$
 e) 1 f) $-1/5$ g) $4/3$ h) 6

12. Expresa el resultado en forma de una sola potencia utilizando las propiedades de las potencias:

a) $2^{-5} \cdot 2^4$ b) $5^4 : 5^7$ c) $(2^{-4})^3$ d) $3^2 \cdot 3^{-3} \cdot 3^4$

a) 2^{-1} b) 5^{-3}
 c) 2^{-12} d) 3^3

13. Aplicando la potencia de un producto o de un cociente, escribe como una sola potencia:

a) $3^5 \cdot 5^5 \cdot 7^5$ b) $7^6 : 9^6$
 c) $6^{-3} \cdot 7^{-3}$ d) $3^{-4} : 5^{-4}$

a) $(3 \cdot 5 \cdot 7)^5$ b) $(7 : 9)^6$
 c) $(6 \cdot 7)^{-3}$ d) $(3 : 5)^{-4}$

14. Sustituye en tu cuaderno los \blacksquare por uno de los signos $=$ o \neq :

a) $4^3 \blacksquare 12$ b) $(-7)^5 \blacksquare -7^5$

c) $7^{3^2} \blacksquare 7^6$ d) $(8-5)^2 \blacksquare 9$

a) \neq b) $=$ c) \neq d) $=$

15. Simplificando reduce a una sola potencia:

a) $\frac{12^5}{3^4 \cdot 2^{10}}$ b) $\frac{3^4}{15^4}$
 a) 3 b) 5^{-4}

16. Escribe en notación científica:

a) 54 689 000 000 000 000
 b) La diezmillonésima parte de 4 unidades.
 a) $5,4689 \cdot 10^{16}$ b) $4 \cdot 10^{-7}$

17. Calcula:

a) $3,45 \cdot 10^{12} + 6,3 \cdot 10^{11}$
 b) $2,35 \cdot 10^{-23} : (2,5 \cdot 10^{-18})$
 a) $4,08 \cdot 10^{12}$ b) $9,4 \cdot 10^{-6}$

18. Nuestro sistema solar se encuentra situado a 27 700 años luz del centro de la galaxia. Expresa en kilómetros y en notación científica esta distancia sabiendo que un año luz es la distancia que recorre la luz en un año a 300 000 km/s

$27\,700 \cdot 300\,000 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 2,6206416 \cdot 10^{17}$ km

19. El disco duro de un ordenador portátil tiene 400 Gb de capacidad, y un CD-ROM, 650 Mb. ¿Cuántos CD-ROM caben en el disco duro si 1 Gb = 2^{10} Mb?

N.º de CD: $400 \cdot 2^{10} : 650 = 630$

3. RADICALES

PIENSA Y CALCULA

Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Número		2								
Cuadrado o cubo perfecto	4	8	9	16	25	27	81	100	125	1 000

Número	2	2	3	4	5	3	9	10	5	10
Cuadrado o cubo perfecto	4	8	9	16	25	27	81	100	125	1 000

CARNÉ CALCULISTA

Calcula con dos decimales: 784,5 : 5,76

$C = 136,19; R = 0,0456$

APLICA LA TEORÍA

20. ¿Cuántas raíces reales tienen los siguientes radicales?

a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt{0}$ c) $\sqrt{-25}$
 d) $\sqrt[3]{-8}$ e) $\sqrt{1}$ f) $\sqrt[3]{1}$
 a) Dos b) Una c) Ninguna
 d) Una e) Dos f) Una

21. Calcula mentalmente si es posible:

a) $\sqrt{25}$ b) $\sqrt[3]{-125}$ c) $\sqrt{-49}$ d) $\sqrt[3]{-27}$
 a) ± 5 b) -5 c) No tiene. d) -3

22. Simplifica los radicales:

a) $\sqrt[6]{5^4}$ b) $\sqrt[9]{5^6}$ c) $\sqrt[12]{5^8}$ d) $\sqrt[24]{5^{18}}$
 a) $\sqrt[3]{5^2}$ b) $\sqrt[3]{5^2}$ c) $\sqrt[3]{5^2}$ d) $\sqrt[4]{5^2}$

23. Calcula las siguientes raíces factorizando el radicando:

a) $\sqrt{32\,400}$ b) $\sqrt[3]{3\,375}$ c) $\sqrt[5]{1024}$
 a) 180 b) 15 c) 4

24. Extrae todos los factores posibles de:

a) $\sqrt{81a^5bc^6}$ b) $\sqrt[3]{128a^8b^2c^{15}}$
 a) $9a^2c^3\sqrt{ab}$ b) $4a^2c^5\sqrt[3]{2a^2b^2}$

25. Suma y resta los siguientes radicales:

a) $\sqrt{50} - \sqrt{32} + \sqrt{18}$ b) $5\sqrt{98} - 3\sqrt{200} + 4\sqrt{8}$
 a) $4\sqrt{2}$ b) $13\sqrt{2}$

26. Sustituye en tu cuaderno los \blacksquare por uno de los signos = o \neq :

a) $\sqrt{36+64} \blacksquare \sqrt{36} + \sqrt{64}$
 b) $\sqrt{100-36} \blacksquare \pm 8$
 c) $\sqrt[3]{8+27} \blacksquare \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27}$
 a) \neq b) = c) \neq

27. Un contenedor tiene forma de cubo. Si tiene una capacidad de 8 m³, ¿cuánto mide la arista?

Arista: $\sqrt[3]{8} = 2$ m

4. PROPIEDADES Y RELACIÓN

ENTRE POTENCIAS Y RADICALES

PIENSA Y CALCULA

Calcula el resultado de las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{49}$ b) $\sqrt{36} : \sqrt{9}$ c) $(\sqrt{4})^3$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$
 a) ± 35 b) ± 2 c) ± 8 d) ± 2

CARNÉ CALCULISTA

Calcula: $\frac{2}{5} \left(\frac{7}{6} - \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{6}$

APLICA LA TEORÍA

28. Aplicando las propiedades de los radicales, expresa como una sola raíz:

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$ b) $\sqrt{6} : \sqrt{3}$ c) $(\sqrt[3]{5})^2$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$
 a) $\sqrt{15}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{5^2}$ d) $\sqrt[6]{5}$

29. Aplica las propiedades de los radicales y calcula:

a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}$ b) $\sqrt{20} : \sqrt{5}$
 c) $\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$
 a) ± 6 b) ± 2 c) 5 d) ± 2

30. Escribe los siguientes radicales en forma de potencia:

a) $\sqrt[5]{2}$ b) $\frac{1}{\sqrt[6]{5}}$ c) $\sqrt[7]{2^5}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$
 a) $3^{1/5}$ b) $5^{-1/6}$ c) $3^{5/7}$ d) $7^{-2/3}$

31. Escribe las siguientes potencias en forma de radical y calcula el resultado:

- a) $27^{1/3}$ b) $49^{-1/2}$
 c) $128^{3/7}$ d) $243^{-2/5}$

a) $\sqrt[3]{27} = 3$

b) $\frac{1}{\sqrt{49}} = \pm \frac{1}{7}$

c) $\sqrt[7]{128^3} = (\sqrt[7]{128})^3 = (\sqrt[7]{2^7})^3 = 2^3 = 8$

d) $\frac{1}{\sqrt[5]{243^2}} = \frac{1}{(\sqrt[5]{243})^2} = \frac{1}{(\sqrt[5]{3^5})^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

32. Realiza las siguientes operaciones con la calculadora y redondea los resultados a dos decimales:

- a) $\sqrt{583}$
 b) $\sqrt[3]{875}$
 c) $\sqrt[7]{3^5}$
 d) $\sqrt{85} - \sqrt[3]{805} + \sqrt[5]{2345}$

- a) 24,15 b) 9,56 c) 2,19 d) 4,64

33. Realiza las siguientes operaciones con la calculadora y redondea los resultados a dos decimales:

- a) $2,3^5 \cdot \sqrt{80} - \sqrt{675} : 4,8^3$
 b) $(9,2^3 - \sqrt{34703}) \cdot 1,5^{17}$

- a) 575,45 b) 583 669,35

34. Las cuatro paredes de un cuarto de baño son cuadradas y tienen en total 324 azulejos cuadrados. Si cada azulejo mide 25 cm de lado, ¿cuánto mide de longitud cada pared?

Cada pared tiene: $324 : 4 = 81$ azulejos.
 Cada lado tiene: $\sqrt{81} = 9$ azulejos.
 Cada lado mide: $9 \cdot 25 = 225 \text{ cm} = 2,25 \text{ m}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. POTENCIAS DE EXPONENTE NATURAL

35. Escribe en forma de potencia:

- a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ b) $-2 \cdot (-2) \cdot (-2)$
 c) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ d) $-3 \cdot (-3)$

- a) 2^4 b) $(-2)^3$ c) 3^5 d) $(-3)^2$

36. Calcula mentalmente:

- a) 3^3 b) $(-3)^3$ c) $(-3)^4$
 d) 7^0 e) $(-1)^7$ f) $(-1)^8$

- a) 27 b) -27 c) 81
 d) 1 e) -1 f) 1

37. Calcula:

- a) 19^2 b) $0,75^2$ c) 23^3 d) $1,5^3$

- a) 361 b) 0,5625 c) 12 167 d) 3,375

38. Expresa el resultado en forma de una sola potencia utilizando las propiedades de las potencias:

- a) $3^2 \cdot 3^6$ b) $5^7 : 5^6$ c) $(3^2)^5$ d) $5^2 \cdot 5 \cdot 5^3$

- a) 3^8 b) 5 c) 3^{10} d) 5^6

39. Expresa el resultado en forma de una sola potencia utilizando las propiedades de las potencias:

- a) $x^3 \cdot x^4$ b) $x^7 : x^4$ c) $(x^3)^5$ d) $x \cdot x^2 \cdot x^3$
 a) x^7 b) x^3 c) x^{15} d) x^6

40. Multiplica para eliminar el paréntesis:

- a) $2a^3b(3a^2b - 6a^3b^3)$
 b) $3xy^2z^3(4x^2y^3z + 5x^3y - 7x^5z)$

- a) $6a^5b^2 - 12a^6b^4$
 b) $12x^3y^5z^4 + 15x^4y^3z^3 - 21x^6y^2z^4$

41. Sacar factor común todos los factores que puedas:

- a) $12a^4b^5 - 18a^3b^6$
 b) $6x^5y^2z^3 + 15x^2y^5z^3 - 18x^2y^3z^5$

- a) $6a^3b^5(2a - 3b)$
 b) $3x^2y^2z^3(2x^3 + 5y^3 - 6yz^2)$

42. Calcula el número de bytes que caben en un disco duro de 50 Gb, sabiendo que:

1 Kb = 2^{10} bytes; 1 Mb = 2^{10} Kb; 1 Gb = 2^{10} Mb

$$50 \text{ Gb} = 50 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} = 50 \cdot 2^{30} = 5,37 \cdot 10^{10} \text{ bytes}$$

2. POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO

43. Calcula mentalmente en forma de fracción el resultado de las siguientes potencias:

- a) 3^{-1} b) $(-3)^{-2}$ c) 3^{-3} d) $(-3)^{-3}$
 e) 7^{-1} f) $(-7)^{-1}$ g) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}$ h) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

- a) $1/3$ b) $1/9$ c) $1/27$ d) $-1/27$
 e) $1/7$ f) $-1/7$ g) $3/5$ h) 2

44. Simplifica:

- a) $\frac{2^5 \cdot 3^7 \cdot 4^2}{2^{-1} \cdot 3^4 \cdot 6^2}$ b) $\frac{2^{-3} \cdot 5^4 \cdot 6^2}{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 4^3}$

- a) $2^8 \cdot 3$ d) $\frac{3^2 \cdot 5}{2^2}$

45. Sustituye en tu cuaderno los \blacksquare por uno de los signos = o \neq :

- a) $4^3 \blacksquare 6^4$ b) $(-7)^5 \blacksquare 7^5$
 c) $7^{3^2} \blacksquare 7^9$ d) $(8-5)^2 \blacksquare 3^2$

- a) \neq b) \neq c) = d) =

46. Escribe en notación científica:

- a) 0,000 000 000 253
 b) La centésima parte de una milésima.

- a) $2,53 \cdot 10^{-11}$ b) 10^{-5}

47. Calcula:

- a) $4,56 \cdot 10^{-11} - 1,6 \cdot 10^{-10}$
 b) $4,5 \cdot 10^{20} \cdot 3,5 \cdot 10^{-12}$

- a) $-1,144 \cdot 10^{-10}$ b) $1,575 \cdot 10^9$

48. Escribe en notación científica:

- a) Tres billones de euros.
 b) 128 458 millones de toneladas.

- a) $3 \cdot 10^{12}$ euros. b) $1,28458 \cdot 10^{11}$ toneladas.

3. RADICALES

49. Calcula mentalmente si se puede:

- a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt[3]{-8}$ c) $\sqrt[4]{-16}$ d) $\sqrt[3]{125}$
 a) ± 7 b) -2 c) No tiene. d) 5

50. Simplifica los radicales:

- a) $\sqrt[6]{7^2}$ b) $\sqrt[15]{7^{12}}$ c) $\sqrt[20]{7^{12}}$ d) $\sqrt[30]{7^{18}}$
 a) $\sqrt[3]{7}$ b) $\sqrt[5]{7^4}$ c) $\sqrt[5]{7^3}$ d) $\sqrt[5]{7^3}$

51. Extrae todos los factores posibles de:

- a) $\sqrt{108}$ b) $\sqrt[3]{1080}$
 c) $\sqrt{243a^8b^3c^7}$ d) $\sqrt[3]{125a^9b^{17}c^{25}}$
 a) $6\sqrt{3}$ b) $6\sqrt[3]{5}$
 c) $9a^4bc^3\sqrt{3bc}$ d) $5a^3b^5c^8\sqrt[3]{b^2c}$

52. Suma y resta los radicales:

- a) $3\sqrt{32} - 2\sqrt{50} + \sqrt{72}$
 b) $2\sqrt{200} - 3\sqrt{18} - 4\sqrt{98}$
 a) $8\sqrt{2}$ b) $-17\sqrt{2}$

53. Sustituye en tu cuaderno los recuadros por uno de los signos = o \neq :

- a) $\sqrt{36 + 64}$ $\sqrt{100}$
 b) $\sqrt{100 - 36}$ $\sqrt{100} - \sqrt{36}$
 c) $\sqrt[4]{16 + 81}$ $\sqrt[4]{16} + \sqrt[4]{81}$
 a) = b) \neq c) \neq

54. Un cartón de leche es de forma cúbica y contiene dos litros. Otro cartón de 2 litros tiene forma de prisma cuadrangular y la arista de su base mide 10 cm. Calcula la superficie de ambos. ¿Cuál es menor?

Arista del cubo: $\sqrt[3]{2} = 1,26 \text{ dm} = 12,6 \text{ cm}$
 Superficie del cubo: $6 \cdot 12,6^2 = 952,56 \text{ cm}^2$
 Altura del prisma: $2000 : 10^2 = 20 \text{ cm}$
 Superficie del prisma:
 $2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 \cdot 20 = 1000 \text{ cm}^2$
 Es menor el área del cubo.

4. PROPIEDADES Y RELACIÓN ENTRE POTENCIAS Y RADICALES

55. Aplicando las propiedades de los radicales, expresa como una sola raíz:

- a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$ b) $\sqrt{14} : \sqrt{2}$
 c) $(\sqrt[5]{7})^3$ d) $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$
 a) $\sqrt{21}$ b) $\sqrt{7}$ c) $\sqrt[5]{7^3}$ d) $\sqrt[10]{3}$

56. Aplica las propiedades de los radicales y calcula:

- a) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$ b) $\sqrt{45} : \sqrt{5}$
 c) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$ d) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}}$
 a) ± 9 b) ± 3
 c) 4 d) ± 2

57. Escribe en forma de potencia los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[3]{2}$ b) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ c) $\sqrt[5]{3^2}$ d) $\frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$
 a) $2^{1/3}$ b) $7^{-1/2}$ c) $3^{2/5}$ d) $2^{-3/5}$

58. Escribe en forma de radical las siguientes potencias:

- a) $3^{1/5}$ b) $5^{-1/3}$
 c) $6^{4/5}$ d) $7^{-3/5}$
 a) $\sqrt[5]{3}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$
 a) $\sqrt[5]{6^4}$ b) $\frac{1}{\sqrt[5]{7^3}}$

59. Realiza las siguientes operaciones con la calculadora y redondea los resultados a dos decimales:

- a) $\sqrt{722}$ b) $\sqrt[3]{87,95}$
 c) $5,3^7 : \sqrt{896,7}$ d) $\sqrt{23} + \sqrt[3]{23} + \sqrt[5]{23}$
 a) 26,87 b) 4,45
 c) 3922,90 d) 9,51

60. Realiza las siguientes operaciones con la calculadora y redondea los resultados a dos decimales:

- a) $(7,8^2 - \sqrt{87}) : 2,5$
 b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{4}$
 c) $\sqrt{1000} \cdot \sqrt[3]{1000} \cdot \sqrt[4]{1000}$
 a) 20,61 b) 6,76
 c) 2,88 d) 1778,28

PARA AMPLIAR

61. Calcula el valor de x en cada uno de los siguientes casos:

- a) $2^x = 32$ b) $3^4 = x$
 c) $x^3 = 125$ d) $x^3 = -8$
 a) $x = 5$ b) $x = 81$
 c) $x = 5$ d) $x = -2$

62. Calcula:

- a) $2^5 + 3^3 + 5^2$ b) $(-2)^5 + 3^2 - 5^3$
 c) $(-2)^6 + 3^4 - (-5)^3$ d) $10^6 - (-10)^3 + 10^2$
 a) 84
 b) -148
 c) 270
 d) 1001100

63. Calcula:

- a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ b) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$
 a) 8/27 b) -8/27 c) 16/81 d) 16/81

64. Calcula:

- a) 5^{-1} b) $(-5)^{-1}$ c) 2^{2^3} d) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}$
 a) 1/5
 b) -1/5
 c) 256
 d) -3

65. Expresa el resultado en forma de una sola potencia utilizando las propiedades de las potencias:

- a) $5^{-3} \cdot 5^{-4}$
 b) $3^{-4} : 3^{-7}$
 c) $(7^{-3})^{-5}$
 d) $13^{-2} \cdot 13^{-3} \cdot 13^{-4}$

- a) 5^{-7} b) 3^3
 c) 7^{15} d) 13^{-9}

66. Sustituye en tu cuaderno los recuadros por uno de los signos = o ≠:

- a) 5^3 15 b) $(-2)^5$ -32
 c) 2^{3^5} 2^{15} d) $(7-3)^5$ 4^5

- a) ≠ b) =
 c) ≠ d) =

67. Calcula mentalmente:

- a) $\sqrt[3]{125}$ b) $\sqrt[3]{-125}$
 c) $\sqrt[3]{0,001}$ d) $\sqrt[3]{-0,008}$
 a) 5 b) -5
 c) 0,1 d) -0,2

68. ¿Entre qué dos números enteros están las siguientes raíces?

- a) $\sqrt{55}$ b) $\sqrt[3]{84}$
 c) $\sqrt[4]{93}$ d) $\sqrt[5]{100}$

- a) Entre 7 y 8 b) Entre 4 y 5
 c) Entre 3 y 4 d) Entre 2 y 3

69. Introduce dentro del radical los factores que están fuera:

- a) $3^2 ab^3 c \sqrt{5ab}$ b) $2^3 a^2 b^5 c^2 \sqrt[3]{5a^2 bc^2}$
 c) $3^2 ab^3 c^4 \sqrt[4]{10ab^3 c^2}$ d) $2^3 a^2 bc^4 \sqrt[5]{15a^4 bc^2}$

- a) $\sqrt{405a^3 b^7 c^2}$
 b) $\sqrt[3]{2560a^8 b^{16} c^8}$
 c) $\sqrt[4]{65610a^5 b^{15} c^{18}}$
 d) $\sqrt[5]{491520a^{14} b^6 c^{22}}$

70. Calcula el valor de x en cada uno de los siguientes casos:

- a) $\sqrt{x} = \pm 5$ b) $\sqrt{49} = x$
 c) $\sqrt[3]{x} = 5$ d) $\sqrt[3]{32} = 2$

- a) $x = 25$ b) $x = \pm 7$ c) $x = 125$ d) $x = 5$

71. Calcula descomponiendo en factores primos:

- a) $\sqrt[3]{216}$ b) $\sqrt[3]{729}$
 c) $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$ d) $\sqrt[5]{\frac{243}{32}}$

- a) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = 6$ b) $\sqrt[3]{3^6} = 9$

- c) $\sqrt[3]{\frac{2^3}{5^3}} = \frac{2}{5}$ d) $\sqrt[5]{\frac{3^5}{2^5}} = \frac{3}{2}$

72. Calcula el valor de las siguientes potencias:

- a) $4^{3/2}$ b) $8^{2/3}$
 c) $16^{3/4}$ d) $32^{4/5}$

- a) $\sqrt{(2^3)^2} = \pm 8$
 b) $\sqrt[3]{(2^2)^3} = 4$
 c) $\sqrt[4]{(2^3)^4} = \pm 8$
 d) $\sqrt[5]{(2^4)^5} = 16$

CON CALCULADORA

73. Utilizando la calculadora, halla:

- a) 3^{10} b) $7,25^{13}$
 c) $(3/2)^{15}$ d) π^2
 e) 3^{-5} f) $(-3)^8$

- a) 59 049 b) $1,53 \cdot 10^{11}$
 c) 437,89 d) 9,87
 e) $4,12 \cdot 10^{-3}$ f) 6 561

74. Realiza las siguientes operaciones con la calculadora y redondea los resultados a dos decimales:

- a) $5,2^3 (\sqrt{209} - \sqrt{3217}) : 7,2^5$
 b) $(7,25^5 - \sqrt[3]{874658}) \cdot 1,75^7$
 c) $\sqrt[3]{7} (\sqrt{2} + \sqrt[5]{42,7})$

- a) -0,31
 b) 1 002 023,47
 c) 6,76

75. Calcula:

- a) $5,74 \cdot 10^{11} + 6,5 \cdot 10^{12}$
 b) $2,62 \cdot 10^{-24} - 7,53 \cdot 10^{-23}$
 c) $2,3 \cdot 10^{28} \cdot 4,5 \cdot 10^{-19}$
 d) $3,85 \cdot 10^{-15} : (3,5 \cdot 10^{-29})$

- a) $7,074 \cdot 10^{12}$ b) $-7,268 \cdot 10^{-23}$
 c) $1,035 \cdot 10^{10}$ d) $1,1 \cdot 10^{14}$

PROBLEMAS

76. Tenemos una finca en forma de cuadrado cuyo lado mide 14,75 m. Calcula el precio de venta sabiendo que el metro cuadrado vale 23 €

Precio: $14,75^2 \cdot 23 = 5003,94$ €

77. Calcula el número de bytes que caben en un disco duro de 200 Gb, sabiendo que 1 kb = 2^{10} bytes; 1 Mb = 2^{10} kb; 1 Gb = 2^{10} Mb.

Capacidad:
 $200 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} = 200 \cdot 2^{30} = 2,15 \cdot 10^{11}$ bytes.

78. La masa de la Tierra es $5,98 \cdot 10^{24}$ kg y la masa de Neptuno es 17 veces la de la Tierra. Calcula la masa de Neptuno.

$17 \cdot 5,98 \cdot 10^{24} = 1,0166 \cdot 10^{26}$ kg

79. Alba tiene una caja en forma de cubo llena de canicas. Tiene 5 canicas de largo, otras 5 de ancho y otras 5 de alto. Escribe en forma de potencia el número total de canicas y calcula el precio sabiendo que cada canica cuesta 0,15 €

N.º de canicas: 5^3
 Coste: $5^3 \cdot 0,15 = 18,75$ €

80. Tenemos 12 cajas de cocos y cada caja tiene 12 cocos. Escribe en forma de potencia el número total de cocos y halla el precio sabiendo que cada uno cuesta 1,5 €

N.º de cocos: 12^2
 Coste: $12^2 \cdot 1,5 = 216 \text{ €}$

81. Escribe en forma de potencia el número de abuelos que tiene cada persona, y calcula el resultado.

N.º de abuelos: $2^2 = 4$ abuelos.

82. Tenemos un bloque de hielo de 1 m de largo, 20 cm de ancho y 20 cm de alto. Lo cortamos en cubitos para enfriar refrescos. Cada cubito mide 2 cm de largo, 2 cm de ancho y 2 cm de alto, y en cada refresco ponemos dos cubitos. ¿Para cuántos refrescos tendremos?

Volumen del bloque:
 $100 \cdot 20 \cdot 20 = 40\,000 \text{ cm}^3$
 Volumen de cada cubito: $2^3 = 8 \text{ cm}^3$
 N.º de cubitos: $40\,000 : 8 = 5\,000$ cubitos.
 N.º de refrescos: $5\,000 : 2 = 2\,500$ refrescos.

83. Una finca cuadrada de 100 m de lado está plantada de nogales. Si cada nogal ocupa 25 m², ¿cuántos nogales hay plantados?

Superficie: $100^2 = 10\,000 \text{ m}^2$
 N.º de nogales: $10\,000 : 25 = 400$ nogales.

84. El patio de butacas de un teatro tiene igual número de filas que de columnas, y se venden todas las entradas para una sesión, obteniéndose 675 €. Si cada entrada cuesta 3 €, ¿cuántas filas tiene el teatro?

N.º de entradas: $675 : 3 = 225$ entradas.
 N.º de filas: $\sqrt{225} = 15$ filas.

85. Queremos poner baldosas en el suelo de una habitación cuadrada, y en cada lado caben 13 baldosas. Si cada baldosa cuesta 1,5 €, ¿cuánto cuestan todas las baldosas que necesitamos?

N.º de baldosas: $13^2 = 169$ baldosas.
 Coste: $169 \cdot 1,5 = 253,5 \text{ €}$

86. Una finca es cuadrada y tiene una superficie de 1 369 m². ¿Cuánto mide el lado?

Lado: $\sqrt{1\,369} = 37 \text{ m}$

87. Un bloque de casas tiene x plantas, y en cada planta hay x viviendas. Si viven x personas de media en cada vivienda, calcula el valor de x sabiendo que en la casa viven 64 personas.

$x^3 = 64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$

PARA PROFUNDIZAR

88. Expresa en forma de potencia de 2 el número total de cuadrados que tiene un tablero de ajedrez, sabiendo que posee 8 filas y 8 columnas.

N.º de cuadrados: $8 \cdot 8 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^6$ cuadrados.

89. Escribe en forma de potencia el número de bisabuelos que tiene cada persona y calcula el resultado.

N.º de bisabuelos: $2^3 = 8$ bisabuelos.

90. Una célula se reproduce cada hora por bipartición. ¿Cuántos días tardará en sobrepasar un millón?

$2^x > 1\,000\,000$
 El menor x que lo verifica es $x = 20$ horas.
 Lo alcanza en el primer día.

91. Un velero cuesta 0,5 millones de euros y se devalúa cada año un 18%. ¿Cuántos años tardará en valer menos de 150 000 €? Observa que si se devalúa un 18%, su valor será un 82% del precio inicial.

$500\,000 \cdot 0,82^x < 150\,000$
 El menor x que lo verifica es $x = 7$ años.

92. Una caja tiene forma de cubo cuyo volumen es de 3,375 m³. Calcula su superficie.

Arista: $\sqrt[3]{3,375} = 1,5 \text{ m}$
 Superficie: $6 \cdot 1,5^2 = 13,5 \text{ m}^2$

93. Un año luz es el espacio que recorre la luz en un año. Sabiendo que la velocidad de la luz es de 300 00 km/s, expresa en kilómetros y en notación científica un año luz.

$300\,000 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 9,4608 \cdot 10^{12} \text{ km}$

APLICA TUS COMPETENCIAS

94. Un CD-ROM tiene 640 Mb. Halla su capacidad en bytes.

Capacidad:
 $640 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} = 640 \cdot 2^{20} = 671\,088\,640$ bytes

95. Un teléfono móvil tiene una capacidad de 8,67 Gb, Halla su capacidad en bytes.

$9\,309\,341\,614$ bytes.

96. El disco duro de un ordenador tiene 400 Gb. Halla su capacidad en bytes.

Capacidad:
 $400 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} = 400 \cdot 2^{30} = 4,29 \cdot 10^{11}$ bytes

COMPRUEBA LO QUE SABES

1. ¿Qué son radicales equivalentes? Pon un ejemplo.

Dos radicales son equivalentes si tienen las mismas raíces.

Si en un radical multiplicamos el índice y el exponente por el mismo número, obtenemos otro radical equivalente.

Ejemplo: $\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[6]{5^4} = \sqrt[9]{5^6} = \sqrt[12]{5^8} = \dots = 2,92\dots$

2. Expresa el resultado en forma de una sola potencia utilizando las propiedades de las potencias:

- a) $3^5 \cdot 3^4$ b) $a^9 : a^3$
- c) $(x^m)^p$ d) $x^3 : x^7$
- a) 3^9 b) a^6 c) $x^{m \cdot p}$ d) x^{-4}

3. Sustituye los recuadros por uno de los signos = o ≠:

- a) 5^3 15 b) $(-6)^5$ -6^5
- c) 3^{5^2} 3^{10} d) $(7-5)^4$ 16
- a) \neq b) = c) \neq d) =

4. Extrae todos los factores posibles de:

- a) $\sqrt{2592}$ b) $\sqrt[3]{8640}$
 c) $\sqrt{81a^5bc^6}$ d) $\sqrt[3]{32a^8b^2c^{12}}$
- a) $36\sqrt{2}$
 b) $12\sqrt[3]{5}$
 c) $9a^2c^3\sqrt{ab}$
 d) $2a^2c^4\sqrt[3]{2^2a^2b^2}$

5. Suma y resta los radicales:

- a) $3\sqrt{32} - 2\sqrt{50} + \sqrt{72}$
 b) $2\sqrt{75} - 4\sqrt{27} + 5\sqrt{12}$
- a) $12\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$
 b) $10\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

6. Escribe en forma de radical las siguientes potencias y calcula el resultado:

- a) $25^{1/2}$ b) $125^{-1/3}$
 c) $16^{3/4}$ d) $32^{-2/5}$
- a) $\sqrt{25} = \pm 5$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}$
 c) $\sqrt[4]{16^3} = \pm 8$ d) $\frac{1}{\sqrt[5]{32^2}} = \frac{1}{4}$

7. El disco duro de un ordenador portátil tiene una capacidad de 40 Gb, y un CD ROM, de 650 Mb. ¿Cuántos CD ROM caben en el disco duro si 1 Gb = 2^{10} Mb?

N.º de CD: $40 \cdot 2^{10} : 650 = 63,02$

8. Una finca tiene forma de cuadrado. Si se vende a razón de 3,6 €/m² y se han obtenido por la venta 3802,5 €, ¿cuánto mide de lado la finca?

$\sqrt{3802,5 : 3,6} = 32,5 \text{ m}$



PASO A PASO

97. Calcula:

$\left(\frac{3}{4}\right)^5$

Resuelto en el libro del alumnado.

98. Calcula:

$3,28^5$

Resuelto en el libro del alumnado.

99. Calcula con 15 dígitos:

$\sqrt{12607,25}$

Resuelto en el libro del alumnado.

100. Calcula con 10 dígitos:

$\sqrt[2]{86^5}$

Resuelto en el libro del alumnado.

101. Simplifica el siguiente radical, sacando del radicando todos los factores posibles:

$\sqrt[3]{3125}$

Resuelto en el libro del alumnado.

102. Suma y resta los siguientes radicales:

$4\sqrt{50} - 7\sqrt{8} + 5\sqrt{18}$

Resuelto en el libro del alumnado.

103. Calcula $3,5 \cdot 10^{18} : (4,75 \cdot 10^{-9})$

Resuelto en el libro del alumnado.

104. Se tiene un depósito de gasoil para la calefacción con forma de cubo cuya arista mide 2,25 m. Si el litro de gasoil de calefacción cuesta 0,65 €/L, calcula lo que cuesta llenar el depósito.

Resuelto en el libro del alumnado.

PRACTICA

105. Calcula las siguientes potencias:

- a) $(2/3)^6$ b) $(-2/3)^7$
 a) 64/729 b) -128/2187

106. Calcula las siguientes potencias:

- a) 2^{64} b) $239,72^5$
 a) 18446744073709551616
 b) $7,916283613 \cdot 10^{11}$

107. Calcula con 15 dígitos:

- a) $\sqrt{256,256}$ b) $\sqrt[5]{845,23}$
 a) 16,0079980009994 b) 3,84941718350978

108. Simplifica los siguientes radicales sacando del radicando todos los factores posibles:

- a) $\sqrt{2592}$
 b) $\sqrt[3]{432}$
 a) $36\sqrt{2}$ b) $6\sqrt[3]{2}$

109. Suma los radicales:

- a) $7\sqrt{50} - 2\sqrt{8} + 5\sqrt{162}$
 b) $9\sqrt{147} - 5\sqrt{75} + 3\sqrt{12}$
 a) $76\sqrt{2}$ b) $44\sqrt{3}$

110. Calcula y luego redondea mentalmente a dos decimales:

- a) $\sqrt{473,5 + 75,47}$
 b) $\sqrt[5]{45,5^2 - 7,25^3} + 5,2^7$
 a) 23,43
 b) $1,03 \cdot 10^5$

111. Calcula:

a) $9,74 \cdot 10^{12} - 8,5 \cdot 10^{13} + 9,3 \cdot 10^{14}$

b) $3,5 \cdot 10^{-25} : (2,5 \cdot 10^{-34})$

a) $8,5474 \cdot 10^{14}$ c) $1,4 \cdot 10^9$

Escribe las expresiones numéricas correspondientes a los siguientes enunciados y halla el resultado:

112. El número 23,45 elevado al cuadrado, menos la raíz cuadrada de 825,83

$$23,45^2 - \sqrt{825,83} = 521,1652419$$

113. El número 1,5 elevado a la quinta, menos la raíz cuadrada de 1,83, más la raíz cúbica de 2,5

$$1,5^5 - \sqrt{1,83} + \sqrt[3]{2,5} = 7,598183881$$

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris:

114. Queremos vender los chopos de una finca que tiene 54 filas y 54 columnas, al precio de 54 € cada chopo. Expresa en forma de potencia el valor de los chopos y halla el resultado.

$$\text{Valor: } 54^3 = 157\,464 \text{ €}$$

115. Calcula la arista de un depósito de forma cúbica que ha costado llenarlo de leche 3215,625 €, si el litro de leche se ha pagado a 0,6 €

$$\text{Arista: } \sqrt[3]{3\,215,625/0,6} = 17,5 \text{ dm} = 1,75 \text{ m}$$

116. Calcula el número de bytes que caben en un CD-ROM de 650 Mb, sabiendo que:

$$1 \text{ kb} = 2^{10} \text{ bytes y } 1 \text{ Mb} = 2^{10} \text{ kb}$$

Capacidad:

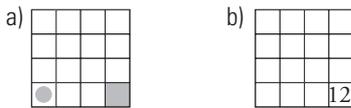
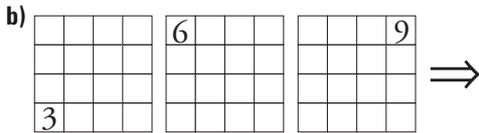
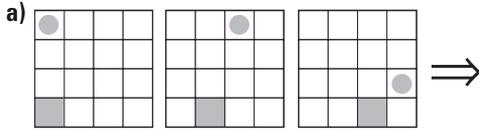
$$650 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} = 681\,574\,400 \text{ bytes.}$$

3. Sucesiones y progresiones

1. SUCESIONES

PIENSA Y CALCULA

Dibuja en tu cuaderno el siguiente elemento de las series siguientes:



CARNÉ CALCULISTA

Calcula con dos decimales: $423,7 : 0,72$

$C = 588,47; R = 0,0016$

APLICA LA TEORÍA

1. Halla los diez primeros términos de las siguientes sucesiones:

- a) 3, 8, 13, 18... b) 8, 4, 0, -4...
 c) 2, -2, 2, -2... d) 1/2, 1/4, 1/6, 1/8...

- a) 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48
 b) 8, 4, 0, -4, -8, -12, -16, -20, -24, -28
 c) 2, -2, 2, -2, 2, -2, 2, -2, 2, -2
 d) 1/2, 1/4, 1/6, 1/8, 1/10, 1/12, 1/14, 1/16, 1/18, 1/20

2. Halla los diez primeros términos de las siguientes sucesiones:

- a) 2, 1, 2, 4, 2, 7... b) 1, 1, 2, 3, 5, 8...
 c) 2, 1, 4, 3, 6, 5... d) 1, -2, 4, -8...

- a) 2, 1, 2, 4, 2, 7, 2, 10, 2, 13
 b) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55
 c) 2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, 10, 9
 d) 1, -2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256, -512

3. Calcula los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:

- a) $a_n = 3n + 2$ b) $a_n = (n + 1)^2$
 c) $a_n = 3 \cdot 2^n$ d) $a_n = (-2)^n$

- a) 5, 8, 11, 14
 b) 4, 9, 16, 25
 c) 6, 12, 24, 48
 d) -2, 4, -8, 16

4. Halla los cuatro primeros términos positivos de las sucesiones siguientes y trata de hallar mentalmente la fórmula del término general.

- a) Números pares. b) Números impares.
 c) Múltiplos de 5 d) Cubos perfectos.

- a) 2, 4, 6, 8 $\Rightarrow a_n = 2n$
 b) 1, 3, 5, 7 $\Rightarrow a_n = 2n - 1$
 c) 5, 10, 15, 20 $\Rightarrow a_n = 5n$
 d) 1, 8, 27, 64 $\Rightarrow a_n = n^3$

2. PROGRESIONES ARITMÉTICAS

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente la suma de los 100 primeros números naturales. Observa que la suma de los términos equidistantes de los extremos son iguales.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

$$1 + 100 = 101, \quad 2 + 99 = 101, \quad 3 + 98 = 101 \dots$$

$$101 \cdot 50 = 5050$$

CARNÉ CALCULISTA

Calcula: $\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{2} - \frac{3}{8} : \frac{9}{4} = \frac{10}{3}$

APLICA LA TEORÍA

5. Encuentra el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

- a) 5, 9, 13, 17... b) 6, 3, 0, -3...
 c) 2/3, 1/3, 0, -1/3... d) 1/2, 1, 3/2, 2...

- a) $a_1 = 5, d = 4$
 $a_n = 5 + 4(n - 1) = 4n + 1$
 b) $a_1 = 6, d = -3$
 $a_n = 6 - 3(n - 1) = -3n + 9$
 c) $a_1 = 2/3, d = -1/3$
 $a_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(n - 1) = 1 - \frac{n}{3}$
 d) $a_1 = 1/2, d = 1/2$
 $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n - 1) = \frac{n}{2}$

6. Escribe el término general y los tres primeros términos de la progresión aritmética cuyo primer término es $a_1 = 6$ y $d = 2,5$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_n = 6 + 2,5(n - 1) = 2,5n + 3,5$$

6; 8,5; 11

7. En la progresión 5, 9, 13, 17..., ¿qué término vale 49?

$$a_1 = 5, d = 4$$

$$a_n = 4n + 1$$

$$4n + 1 = 49 \Rightarrow n = 12$$

8. En una progresión aritmética conocemos los términos $a_5 = 19$ y $a_8 = 28$. Calcula la diferencia y el primer término.

$$a_1 + 4d = 19$$

$$a_1 + 7d = 28$$

Restando a la 2.ª ecuación la 1.ª:

$$3d = 9 \Rightarrow d = 3$$

$$a_1 + 4 \cdot 3 = 19 \Rightarrow a_1 = 7$$

9. Calcula la suma de los 25 primeros términos de la progresión aritmética cuyo término general es:

$$a_n = 2n + 6$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$a_1 = 2 + 6 = 8$$

$$a_{25} = 50 + 6 = 56$$

$$S = \frac{8 + 56}{2} \cdot 25 = 800$$

10. Calcula la suma de los 12 primeros términos de la progresión aritmética cuyo término general es:

$$a_n = 3n/2 + 2$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$a_1 = 3/2 + 2 = 7/2$$

$$a_{12} = 18 + 2 = 20$$

$$S = \frac{7/2 + 20}{2} \cdot 12 = 141$$

3. PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente los dos términos siguientes de cada una de estas sucesiones:

a) 3, 6, 12, 24... b) 20, 10, 5, 5/2...

c) 3, 3, 3, 3... d) 5, -5, 5, -5...

a) 48, 96

b) 5/4, 5/8

c) 3, 3

d) 5, -5

CARNÉ CALCULISTA

Calcula con dos decimales: 34,25 : 9,6

$$C = 3,56; R = 0,074$$

APLICA LA TEORÍA

11. Encuentra el término general de las siguientes progresiones geométricas:

a) 5, 15, 45, 135...

b) 6, 3, 3/2, 3/4...

a) $a_1 = 5, r = 3 \Rightarrow a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$

b) $a_1 = 6, r = 1/2 \Rightarrow a_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

12. Dada una progresión geométrica cuyo primer término es $a_1 = 4$ y la razón $r = 5$, calcula:

a) a_6

b) a_{10}

c) a_n

a) $a_6 = 4 \cdot 5^5$

b) $a_{10} = 4 \cdot 5^9$

c) $a_n = 4 \cdot 5^{n-1}$

13. Calcula la suma de los infinitos términos de las siguientes progresiones geométricas:

a) 1/5, 1/25, 1/125, 1/625...

b) 3, 2, 4/3, 8/9, 16/27...

a) $a_1 = 1/5, r = 1/5 \Rightarrow |1/5| < 1 \Rightarrow S = \frac{1/5}{1 - 1/5} = 1/4$

b) $a_1 = 3, r = 2/3 \Rightarrow |2/3| < 1 \Rightarrow S = \frac{3}{1 - 2/3} = 9$

14. En la progresión geométrica 2, 4, 8, 16, 32..., ¿qué término vale 1 024?

$$a_1 = 2, r = 2 \text{ y } a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$2 \cdot 2^{n-1} = 1024$$

$$2^n = 2^{10}$$

$$n = 10$$

15. Encuentra la razón de la progresión geométrica que tiene $a_4 = 135$ y $a_6 = 1215$

$$\left. \begin{aligned} a_1 \cdot r^3 &= 135 \\ a_1 \cdot r^5 &= 1215 \end{aligned} \right\}$$

Dividiendo la 2.ª ecuación entre la 1.ª:

$$r^2 = 9 \Rightarrow r = \pm 3$$

16. Calcula la suma de los 10 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas:

a) 2, 14, 98, 686...

b) 3, -6, 12, -24...

a) $a_1 = 2, r = 7, a_{10} = 2 \cdot 7^9$

$$S_{10} = \frac{2 \cdot 7^9 \cdot 7 - 2}{7 - 1} = 94\,158\,416$$

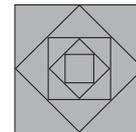
b) $a_1 = 3, r = -2, a_{10} = 3 \cdot (-2)^9$

$$S_{10} = \frac{3 \cdot (-2)^9 \cdot (-2) - 3}{(-2) - 1} = -1023$$

17. La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es 6 y su primer término es 4. Halla la razón.

$$\frac{4}{1 - r} = 6 \Rightarrow r = 1/3$$

18. Si en un cuadrado de área 8 m² se unen los puntos medios, se obtiene otro cuadrado, y así sucesivamente. Calcula la sucesión de las áreas de dichos cuadrados. ¿Qué tipo de progresión es?



8, 4, 2, 1... Es una progresión geométrica decreciente de razón: $r = 1/2$

4. APLICACIONES: INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO

PIENSA Y CALCULA

Si se depositan en una libreta de ahorro 1 000 € y se paga un 5% de interés anual, ¿cuánto dinero producen al cabo de un año?

50 €

CARNÉ CALCULISTA

Calcula: $\frac{2}{15} : \left(\frac{7}{8} - \frac{5}{6}\right) = \frac{16}{5}$

APLICA LA TEORÍA

19. En un depósito de una entidad financiera ofrecen un 6% de interés simple anual. Si se depositan 7 500 € durante 2 años y Hacienda retiene el 18%, calcula el capital acumulado al finalizar el período.

Tanto por uno final: $0,06 \cdot 0,82 = 0,0492$

$$I = c \cdot r \cdot t$$

$$I = 7\,500 \cdot 0,0492 \cdot 2 = 738 \text{ €}$$

$$C = 7\,500 + 738 = 8\,238 \text{ €}$$

20. Calcula los años que ha estado depositado un capital de 5000 € al 3,5% de interés si se han generado 700 € de intereses, sin el descuento de Hacienda.

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow t = \frac{I}{c \cdot r}$$

$$t = \frac{700}{5000 \cdot 0,035} = 4 \text{ años}$$

21. Calcula el rédito al que se han depositado 18000 € a interés simple durante 5 años si, una vez retenido el 18% de Hacienda, los intereses generados son de 2952 €

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow r = \frac{I}{c \cdot t}$$

$$r = \frac{2952}{18000 \cdot 5} = 0,0328$$

El rédito bruto:

$$r = 0,0328 : 0,82 = 0,04 \Rightarrow R = 4\%$$

22. Se depositan 6500 € al 5% de interés compuesto durante 4 años. Hacienda retiene el 18% de los intereses cuando se recupera el capital. Calcula el capital final si los intereses se abonan anualmente.

$$C = c(1 + r)^t \Rightarrow C = 6500 \cdot 1,05^4 = 7900,79 \text{ €}$$

Los intereses son: $7900,79 - 6500 = 1400,79 \text{ €}$

Hacienda retiene: $1400,79 \cdot 0,18 = 252,14 \text{ €}$

El capital final neto será:

$$7900,79 - 252,14 = 7648,65 \text{ €}$$

23. Se depositan 35500 € al 4% de interés compuesto con abono de intereses diarios durante 2 años. Calcula el capital final si Hacienda retiene el 18% al finalizar el plazo.

$$C = c \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$$

$$C = 35500 \left(1 + \frac{0,04}{360}\right)^{360 \cdot 2} = 38456,52 \text{ €}$$

Los intereses son: $38456,52 - 35500 = 2956,52 \text{ €}$

Hacienda retiene: $2956,52 \cdot 0,18 = 532,17 \text{ €}$

El capital final neto será:

$$38456,52 - 532,17 = 37924,35 \text{ €}$$

24. ¿Qué capital inicial es necesario para que, a interés compuesto durante 4 años al 5% anual y con períodos de capitalización anuales, se acumule un capital final de 15558,48 €?

$$C = c(1 + r)^t \Rightarrow c = \frac{C}{(1 + r)^t} \Rightarrow c = \frac{15558,48}{1,05^4}$$

$$c = 12800 \text{ €}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. SUCESIONES

25. Escribe los seis primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) 1, 9, 17, 25...

b) 2, -4, 8, -16...

c) Los múltiplos de 5

d) Los inversos de los cuadrados de los números naturales.

a) 1, 9, 17, 25, 33, 41

b) 2, -4, 8, -16, 32, -64

c) 0, 5, 10, 15, 20, 25

d) 1, 1/4, 1/9, 1/16, 1/25, 1/36

26. Halla los diez primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $x, 2x, 4x, 8x, \dots$

b) 1, 3, 4, 3, 9...

c) 3, 3, 6, 9, 15...

d) El triple de los números naturales.

a) $x, 2x, 4x, 8x, 16x, 32x, 64x, 128x, 256x, 512x$

b) 1, 3, 4, 3, 9, 3, 16, 3, 25, 3

c) 3, 3, 6, 9, 15, 24, 39, 63, 102, 165

d) 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27

27. Calcula los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = -4n + 2$

b) $a_n = n^2 + 1$

c) $a_n = 2^{-n}$

d) $a_n = (n-2)^n$

a) -2, -6, -10, -14, -18

b) 2, 5, 10, 17, 26

c) 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32

d) -1, 0, 1, 16, 243

2. PROGRESIONES ARITMÉTICAS

28. Encuentra el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

a) 7, 11, 15...

b) 3, -2, -7...

c) -7, -3, 1...

d) 1/2, 3/4, 1...

a) $a_1 = 7, d = 4 \Rightarrow a_n = 7 + 4(n-1) = 4n + 3$

b) $a_1 = 3, d = -5 \Rightarrow a_n = 3 - 5(n-1) = -5n + 8$

c) $a_1 = -7, d = 4 \Rightarrow a_n = -7 + 4(n-1) = 4n - 11$

d) $a_1 = \frac{1}{4}, d = 1/4 \Rightarrow a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(n-1) = \frac{n+1}{4}$

29. Escribe el término general y los tres primeros términos de la progresión aritmética cuyo primer término es $a_1 = 3$ y cuya diferencia es $d = -15/4$

$$a_n = 3 - \frac{15}{4}(n-1) = \frac{-15n + 27}{4}$$

3, -3/4, -9/2

30. En una progresión aritmética, $a_{11} = 3$ y la diferencia es $d = 2/7$. Calcula el primer término.

$$a_{11} = 3, d = 2/7$$

$$a_1 + \frac{2}{7}(11-1) = 3 \Rightarrow a_1 = 1/7$$

31. En una progresión aritmética el primer término vale 3 y el sexto término vale 8. Calcula la diferencia.

$$a_1 = 3, a_6 = 8$$

$$a_6 = a_1 + d(6-1)$$

$$8 = 3 + 5d$$

$$d = 1$$

32. En las siguientes progresiones aritméticas, calcula el término que ocupa el último valor:

a) 4, 6, 8, ..., 30

b) 7/2, 5/2, 3/2, ..., -21/2

- a) $a_1 = 4, d = 2, a_n = 30$
 $a_n = a_1 + d(n-1)$
 $30 = 4 + 2(n-1)$
 $n = 14$
- b) $a_1 = 7/2, d = -1, a_n = -21/2$
 $a_n = a_1 + d(n-1)$
 $-21/2 = 7/2 - (n-1)$
 $n = 15$

33. En una progresión aritmética conocemos los términos $a_5 = 7$ y $a_7 = 25/3$. Calcula la diferencia y el primer término.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$7 = a_1 + (5-1)d \Rightarrow a_1 + 4d = 7$$

$$25/3 = a_1 + (7-1)d \Rightarrow a_1 + 6d = \frac{25}{3}$$

Restando a la 2.^a ecuación la 1.^a:

$$2d = \frac{4}{3} \Rightarrow d = \frac{2}{3}$$

$$a_1 + 4 \cdot \frac{2}{3} = 7 \Rightarrow a_1 = \frac{13}{3}$$

34. Calcula la suma de los 15 primeros términos de la progresión aritmética cuyo término general es $a_n = 3n + 12$

$$a_1 = 3 + 12 = 15$$

$$a_{15} = 3 \cdot 15 + 12 = 57$$

$$S_{15} = \frac{15 + 57}{2} \cdot 15 = 540$$

35. Calcula la suma de los 12 primeros términos de la progresión aritmética cuyo término general es $a_n = n/3 + 4/3$

$$a_1 = 1/3 + 4/3 = 5/3$$

$$a_{12} = 12/3 + 4/3 = 16/3$$

$$S_{12} = \frac{5/3 + 16/3}{2} \cdot 12 = 42$$

3. PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

36. Encuentra el término general de las siguientes progresiones geométricas:

- a) **6, 12, 24...** b) **1/3, 1, 3...**
 c) **-3, 6, -12...** d) **3/4, -1/2, 1/3...**
- a) $a_1 = 6, r = 2, a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$
- b) $a_1 = \frac{1}{3}, r = 3, a_n = \frac{1}{3} \cdot 3^{n-1} = 3^{n-2}$
- c) $a_1 = -3, r = -2, a_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$
- d) $a_1 = \frac{3}{4}, r = -2/3, a_n = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

37. Dada una progresión geométrica cuyo primer término es $a_1 = 8$ y cuya razón es $r = 3/4$, calcula:

- a) a_6 b) a_{10}
 c) a_{20} d) a_n
- a) $a_6 = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$ b) $a_{10} = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9$
- c) $a_{20} = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{19}$ d) $a_n = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

38. En una progresión geométrica, $a_7 = 64/81$ y la razón $r = 2/3$. Calcula el primer término.

$$a_7 = a_1 \cdot r^{7-1}$$

$$\frac{64}{81} = a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 \Rightarrow \frac{2^6}{3^4} = a_1 \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$a_1 = 3^2 = 9$$

39. En la progresión geométrica -5, 10, -20..., ¿qué término vale 640?

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_1 = -5, r = -2$$

$$640 = -5 \cdot (-2)^{n-1}$$

$$-128 = (-2)^{n-1}$$

$$(-2)^7 = (-2)^{n-1}$$

$$n-1 = 7 \Rightarrow n = 8$$

40. En una progresión geométrica el primer término es 1/3 y el séptimo término es 243. Calcula la razón.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$243 = 1/3 \cdot r^{7-1}$$

$$r^6 = 729$$

$$r^6 = 3^6$$

$$r = \pm 3$$

41. Encuentra la razón de la progresión geométrica que tiene $a_1 = 27/64$ y $a_8 = 2/81$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$\frac{2}{81} = \frac{27}{64} \cdot r^{8-1}$$

$$r^7 = \left(\frac{2}{3}\right)^7$$

$$r = \frac{2}{3}$$

42. Calcula la suma de los 12 primeros términos de las siguientes progresiones:

- a) **4, -8, 16...**
 b) **1/10, 1/5, 2/5...**

a) $a_1 = 4, r = -2$
 $a_{12} = 4 \cdot (-2)^{11}$
 $S_{12} = \frac{4 \cdot (-2)^{11} \cdot (-2) - 4}{-2 - 1} = -5460$

b) $a_1 = \frac{1}{10}, r = 2$
 $a_{12} = \frac{1}{10} \cdot 2^{11}$
 $S_{12} = \frac{1/10 \cdot 2^{11} \cdot 2 - 1/10}{2 - 1} = \frac{819}{2}$

43. Calcula la suma de los infinitos términos de las siguientes progresiones:

- a) **9, 3, 1...**
 b) **9/4, 3/2, 1...**

a) $a_1 = 9, r = \frac{1}{3}$
 $S = \frac{9}{1 - (1/3)} = \frac{27}{2}$

$$b) a_1 = \frac{9}{4}, r = \frac{2}{3}$$

$$S = \frac{9/4}{1 - (2/3)} = \frac{27}{4}$$

44. ¿Cuántos términos hay que tomar de la siguiente progresión: 5, 10, 20... para que la suma sea 2 555?

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

$$a_1 = 5, r = 2$$

$$a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$$

$$\frac{5 \cdot 2^{n-1} \cdot 2 - 5}{2 - 1} = 2555$$

$$5(2^n - 1) = 2555$$

$$2^n = 512$$

$$2^n = 2^9$$

$$n = 9$$

45. La suma de los infinitos términos de una progresión es 12 y su razón $r = 1/2$. Halla el primer término.

$$S_n = \frac{a_1}{1 - r}$$

$$12 = \frac{a_1}{1 - 1/2}$$

$$a_1 = 6$$

4. APLICACIONES: INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO

46. En un depósito ofrecen un 3,5% de interés simple por 4 años. Si se depositan 12 000 € y Hacienda retiene el 18% de los intereses, calcula el capital acumulado al finalizar el período.

$$\text{El tanto por uno final: } 0,035 \cdot 0,82 = 0,0287$$

$$I = c \cdot r \cdot t$$

$$I = 12000 \cdot 0,0287 \cdot 4 = 1377,60 \text{ €}$$

$$C = 12000 + 1377,60 = 13377,60 \text{ €}$$

47. Calcula los años que ha estado depositado un capital de 25 500 € al 6% de interés si, realizada la retención de Hacienda del 18%, se han generado 5 018,40 € de intereses.

$$\text{Interés bruto: } 5018,40 : 0,82 = 6120 \text{ €}$$

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow t = \frac{I}{c \cdot r}$$

$$t = \frac{6120}{25500 \cdot 0,06} = 4 \text{ años}$$

48. Calcula el rédito o tanto por ciento al que se han depositado 20 000 € a interés simple durante 2 años si, una vez retenido el 18% de Hacienda, los intereses generados son de 1 640 €

$$\text{Interés bruto: } 1640 : 0,82 = 2000 \text{ €}$$

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow r = \frac{I}{c \cdot t}$$

$$r = \frac{2000}{20000 \cdot 2} = 0,05 \Rightarrow R = 5\%$$

49. Calcula el capital que hay que depositar durante 2 años al 3,25% de interés simple para que generen

unos intereses netos, es decir, descontado el 18% de la retención de Hacienda, de 1 332,50 €

$$1332,50 : 0,82 = c = 0,0325 \cdot 2$$

$$c = \frac{1625}{0,065} = 25000 \text{ €}$$

50. Una entidad financiera ofrece un 3,5% anual por un depósito renovable todos los meses. Si los intereses no se acumulan en el depósito y este se renueva 5 meses, ¿qué interés se obtendrá por 18 000 € una vez descontado el 18% de retención de Hacienda?

$$\text{Tanto por uno final: } 0,035 \cdot 0,82 = 0,0287$$

$$I = c \cdot r \cdot \frac{t}{n}$$

$$I = 18000 \cdot 0,0287 \cdot 5/12 = 215,25 \text{ €}$$

51. ¿Qué capital se acumula si se colocan 31 000 € al 5% de interés compuesto durante 3 años si los intereses se abonan trimestralmente y Hacienda retiene el 18% al finalizar el período?

$$C = c \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$$

$$C = 31000 \left(1 + \frac{0,05}{4}\right)^{4 \cdot 3} = 35983,39 \text{ €}$$

$$\text{Los intereses son: } 35983,39 - 31000 = 4983,39 \text{ €}$$

$$\text{Hacienda retiene: } 4983,39 \cdot 0,18 = 897,01 \text{ €}$$

El capital final neto será:

$$35983,39 - 897,01 = 35086,38 \text{ €}$$

52. ¿Qué capital inicial es necesario tener depositado para que, a interés compuesto durante 5 años al 6% anual y con períodos de capitalización mensuales, se acumule un capital final de 26 977 €?

$$C = c \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$$

$$c \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12 \cdot 5} = 26977$$

$$1,005^{60} c = 26977$$

$$c = 26977 : 1,005^{60}$$

$$c = 20000 \text{ €}$$

PARA AMPLIAR

53. Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas o geométricas y encuentra el término general:

a) $-3/5, 3/10, 6/5, \dots$

b) $11/3, 35/12, 13/6, \dots$

c) $5/6, 1/2, 3/10, \dots$

d) $3/4, -1/2, 1/3, \dots$

a) $a_1 = -3/5, d = 9/10$

Progresión aritmética de término general:

$$a_n = -\frac{3}{5} + \frac{9}{10}(n-1) = \frac{9n-15}{10}$$

b) $a_1 = 11/3, d = -3/4$

Progresión aritmética de término general:

$$a_n = \frac{11}{3} - \frac{3}{4}(n-1) = \frac{53-9n}{12}$$

- c) $a_1 = 5/6, r = 3/5$
 Progresión geométrica de término general:
 $a_n = 5/6 \cdot (3/5)^{n-1}$
 d) $a_1 = 3/4, r = -2/3$
 Progresión geométrica de término general:
 $a_n = 3/4 \cdot (-2/3)^{n-1}$

54. Escribe el término general y los tres primeros términos de la progresión aritmética cuyo primer término es $a_1 = 3/4$ y cuya diferencia es $d = 0,5$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 3/4 + 0,5(n-1) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(n-1)$$

$$a_n = \frac{2n+1}{4}$$

3/4, 5/4, 7/4

55. Calcula el término que ocupa el lugar 100 en la progresión:

-5, -13/3, -11/3...

$$a_n = -5, d = 2/3$$

$$a_{100} = -5 + (100-1)2/3 = -5 + 66 = 61$$

$$a_{100} = 61$$

56. Calcula el primer término y la diferencia en las progresiones aritméticas en las que:

a) $a_3 = 70$ y $a_6 = 115$ b) $a_5 = 6$ y $a_9 = 7$

a) $a_1 + 2d = 70$
 $a_1 + 5d = 115$

Restando a la 2.ª ecuación la 1.ª:

$$3d = 45 \Rightarrow d = 15$$

$$a_1 + 2 \cdot 15 = 70 \Rightarrow a_1 = 70 - 30 = 40$$

b) $a_1 + 4d = 6$
 $a_1 + 8d = 7$

Restando a la 2.ª ecuación la 1.ª:

$$4d = 1 \Rightarrow d = 1/4$$

$$a_1 + 4 \cdot \frac{1}{4} = 6 \Rightarrow a_1 = 5$$

57. Calcula la suma de los 12 primeros términos de la progresión aritmética cuyo término general es $a_n = 5n/2 + 1/2$

$$a_1 = 3$$

$$a_{12} = 30 + 1/2 = 61/2$$

$$S = \frac{3 + 61/2}{2} \cdot 12 = 201$$

58. Dada una progresión geométrica cuyo primer término es $a_1 = 3/8$ y cuya razón es $r = 4/3$, calcula:

- a) a_5
 b) a_{15}
 c) a_{30}
 d) a_n

a) $a_5 = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3$

b) $a_{15} = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{14} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{13}$

c) $a_{30} = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{29} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{28}$

d) $a_n = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}$

59. Calcula la suma de los cinco primeros términos de las siguientes progresiones:

a) 12, 4, 4/3...

b) 9/4, 3/2, 1...

a) $a_1 = 12, r = 1/3$
 $a_5 = 12 \cdot (1/3)^4$
 $S_5 = \frac{12(1/3)^4 \cdot 1/3 - 12}{1/3 - 1} = \frac{484}{27}$

b) $a_1 = 9/4, r = 2/3$
 $a_5 = 9/4 \cdot (2/3)^4 = 4/9$
 $S_5 = \frac{4/9 \cdot 2/3 - 9/4}{2/3 - 1} = \frac{211}{36}$

60. Calcula la suma de los infinitos términos de las siguientes progresiones:

a) 5, 5/4, 5/16...

b) $\sqrt{2}, 1, 1/\sqrt{2}, \dots$

a) $a_1 = 5, r = 1/4$

$$S = \frac{5}{1 - 1/4} = \frac{20}{3}$$

b) $a_1 = \sqrt{2}, r = 1/\sqrt{2}$

$$S = \frac{\sqrt{2}}{1 - 1/\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2} - 1}$$

61. En una progresión geométrica $a_4 = 125$ y $a_6 = 3125$. Calcula el primer término y la razón.

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k}$$

$$a_6 = a_4 \cdot r^{6-4}$$

$$3125 = 125 \cdot r^2$$

$$r^2 = 25 \Rightarrow r = \pm 5$$

Si $r = 5 \Rightarrow a_1 = 1$
 Si $r = -5 \Rightarrow a_1 = -1$

62. Calcula los años que ha estado depositado un capital de 28 500 € al 4,5% de interés simple si se han generado 5 258,25 € una vez retenido el 18% de Hacienda.

Interés bruto: $5\,258,25 : 0,82 = 6\,412,50$ €

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow t = \frac{I}{c \cdot r}$$

$$t = \frac{6\,412,50}{28\,500 \cdot 0,045} = 5 \text{ años}$$

63. Calcula el rédito al que se han depositado 15 000 € a interés simple durante 3 años si, una vez retenido el 18% de Hacienda, los intereses generados son de 1 660,50 €

Interés bruto: $1\,660,50 : 0,82 = 2\,025$ €

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow r = \frac{I}{c \cdot t}$$

$$r = \frac{2\,025}{15\,000 \cdot 3} = 0,045 \Rightarrow R = 4,5\%$$

64. Una entidad financiera ofrece un 4,25% anual por un depósito renovable todos los meses. Si los intereses no se acumulan en el depósito y este se renueva 3 meses, ¿qué interés se obtiene por 24 000 € con la retención del 18% de Hacienda?

Tanto por uno final: $0,0425 \cdot 0,82 = 0,03485$

$$I = c \cdot r \cdot \frac{t}{n}$$

$$I = 24\,000 \cdot 0,03485 \cdot 3/12 = 209,10 \text{ €}$$

65. El primer término de una progresión geométrica es 225, y el cuarto término es 72/5. Calcula la suma de sus infinitos términos.

$$225 \cdot r^3 = 72/5$$

$$r^3 = 8/125 = (2/5)^3$$

$$r = 2/5$$

$$S = \frac{225}{1 - 2/5} = 375$$

66. Calcula el capital bruto que se acumula si se colocan 40 500 € al 4,5% de interés compuesto durante 4 años si los intereses se abonan según las modalidades siguientes:

a) Anualmente.

b) Mensualmente.

a) $C = c(1 + r)^t$

$$C = 40\,500 \cdot 1,045^4 = 48\,297 \text{ €}$$

b) $C = c \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$

$$C = 40\,500 \left(1 + \frac{0,045}{12}\right)^{12 \cdot 4} = 48\,470,98 \text{ €}$$

CON CALCULADORA

67. Calcula los cinco siguientes términos de las progresiones:

a) 3,27; 3,45; 3,63... b) 1 000, 1 200, 1 440...

a) $a_1 = 3,27; d = 0,18$

$$3,27; 3,45; 3,63; 3,81; 3,99; 4,17; 4,35; 4,53...$$

b) $a_1 = 1\,000; r = 1,2$

$$1\,000; 1\,200; 1\,440; 1\,728; 2\,073,6; 2\,488,32;$$

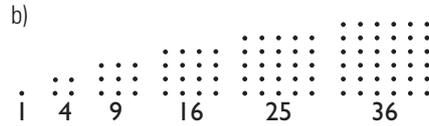
$$2\,985,984; 3\,583,1808$$

68. Calcula los tres siguientes términos de la progresión 3,5; 4,2; 5,04...

$$6,048; 7,2576; 8,70912$$

PROBLEMAS

69. Continúa las siguientes series de números figurados, hasta obtener tres términos más:



70. Calcula la suma de los 15 primeros múltiplos positivos de 6

$$6, 12, 18, \dots$$

$$a_1 = 6, d = 6$$

$$a_{15} = 6 + 6(15 - 1) = 90$$

$$S_{15} = \frac{6 + 90}{2} \cdot 15 = 720$$

71. Calcula la suma de los primeros 100 números impares.

$$1, 3, 5, 7, \dots$$

$$a_1 = 1, d = 2$$

$$a_{100} = 1 + (100 - 1) \cdot 2 = 199$$

$$S_{100} = \frac{1 + 199}{2} \cdot 100 = 10\,000$$

72. Un móvil avanza 5 metros en un segundo y sigue avanzando de forma que cada segundo avanza 2 metros más que en el segundo anterior. ¿Cuánto recorrerá en un minuto?

$$5, 7, 9, \dots$$

$$a_1 = 5, d = 2$$

$$a_{60} = 5 + (60 - 1) \cdot 2 = 123 \text{ m}$$

$$S_{60} = \frac{5 + 123}{2} \cdot 60 = 3\,840 \text{ m}$$

73. Un dependiente recibe el primer día de trabajo una gratificación de 10 €. En los días sucesivos, esta gratificación va aumentando en 1,5 €, de manera que, en su última jornada, cobra 143,5 €. ¿Cuántos días trabajó y cuánto cobró en total por las gratificaciones?

$$a_1 = 10 \text{ €}, d = 1,5 \text{ €}$$

$$10 + 1,5(n - 1) = 143,5$$

$$1,5n + 8,5 = 143,5$$

$$n = 90 \text{ días}$$

$$S_{90} = \frac{10 + 143,5}{2} \cdot 90 = 6\,907,5 \text{ €}$$

74. El precio de la primera entrega de una colección de minerales es de 2 €. En las siguientes entregas el precio sube 0,03 € más que en la anterior. Si la colección consta de 100 ejemplares, ¿cuánto se pagará por el total de la colección?

$$a_1 = 2 \text{ €}, d = 0,03 \text{ €}$$

$$a_{100} = 2 + 99 \cdot 0,03 = 4,97 \text{ €}$$

$$S_{100} = \frac{2 + 4,97}{2} \cdot 100 = 348,5 \text{ €}$$

75. Jorge cobra 18 € semanales de paga y decide ahorrar 1,8 € el primer mes y aumentar cada mes 0,75 € más que el anterior. ¿Cuánto ahorrará en un año?

$$a_1 = 1,8 \text{ €}, d = 0,75 \text{ €}$$

$$a_{12} = 1,8 + 11 \cdot 0,75 = 10,05 \text{ €}$$

$$S_{12} = \frac{1,8 + 10,05}{2} \cdot 12 = 71,1 \text{ €}$$

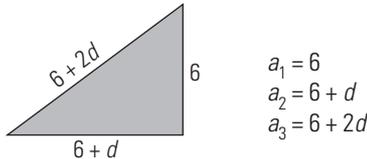
76. Se ha hecho un pozo de 40 m de profundidad. Por el primer metro se han pagado 7,5 € y por cada metro sucesivo se han pagado 2,3 € más que por el anterior. ¿Cuál es el coste del pozo?

$$a_1 = 7,5 \text{ €}, d = 2,3 \text{ €}$$

$$a_{40} = 7,5 + 39 \cdot 2,3 = 97,2 \text{ €}$$

$$S_{40} = \frac{7,5 + 97,2}{2} \cdot 40 = 2094 \text{ €}$$

77. Calcula los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que están en progresión aritmética y que el menor de ellos mide 6 cm



$$a_1 = 6$$

$$a_2 = 6 + d$$

$$a_3 = 6 + 2d$$

$$(6 + 2d)^2 = (6 + d)^2 + 6^2$$

$$3d^2 + 12d - 36 = 0 \Rightarrow d^2 + 4d - 12 = 0$$

$$d = 2$$

$$d = -6 \text{ (Solución no válida)}$$

Los lados son: 6 cm, 8 cm, 10 cm

78. Se quiere saldar semanalmente una deuda. La primera semana se pagan 5 € y en cada una de las semanas siguientes se van pagando 4 € más que en la anterior. Si se paga en 30 semanas, ¿a cuánto asciende el importe de la deuda?

$$a_1 = 5 \text{ €}, d = 4 \text{ €}$$

$$a_{30} = 5 + 29 \cdot 4 = 121 \text{ €}$$

$$S_{30} = \frac{5 + 121}{2} \cdot 30 = 1890 \text{ €}$$

79. Los ángulos de un hexágono están en progresión aritmética, y el menor de ellos mide 40°. Calcula los demás.

$$a_1 = 40^\circ$$

$$a_6 = 40 + 5d$$

$$S_6 = \frac{40 + 40 + 5d}{2} \cdot 6$$

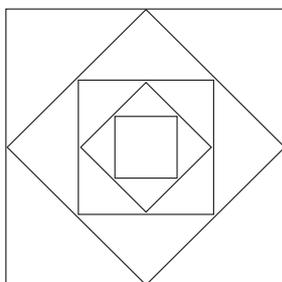
$$\frac{80 + 5d}{2} \cdot 6 = 720$$

$$240 + 15d = 720$$

$$d = 32^\circ$$

Los ángulos son:
40°, 72°, 104°, 136°, 168°, 200°

80. En un cuadrado se unen los puntos medios de sus lados y se obtiene otro cuadrado inscrito. En este último cuadrado se repite la operación, obteniéndose otro cuadrado inscrito. Si el lado del primer cuadrado mide 2 cm, calcula la suma de las áreas de todos los cuadrados.



La sucesión de áreas es: 4, 2, 1, 1/2...

$$a_1 = 4, r = 1/2$$

$$S = \frac{4}{1 - 1/2} = 8 \text{ cm}^2$$

81. Una persona gana en su establecimiento un 7% más de lo que ganó el año anterior. Si el primer año ganó 28 000 €, ¿cuánto habrá obtenido en media docena de años?

$$a_1 = 28000 \text{ €}$$

$$r = 1,07$$

$$a_6 = 28000 \cdot 1,07^5 = 39271,45 \text{ €}$$

$$S_6 = \frac{39271,45 \cdot 1,07 - 28000}{1,07 - 1} = 200292,16 \text{ €}$$

82. Se deja caer una pelota desde una altura de 52 cm. Después de cada bote en el suelo, sube 3/4 cm de la altura de la que cae. ¿Qué longitud recorrerá la pelota antes de llegar al reposo?

Recorre en la bajada:

$$a_1 = 52 \text{ cm}, r = 3/4$$

$$S = \frac{52}{1 - 3/4} = 208 \text{ m}$$

Recorre en la subida:

$$a_1 = 39 \text{ cm}, r = 3/4$$

$$S = \frac{39}{1 - 3/4} = 156 \text{ m}$$

Recorre en total: 208 + 156 = 364 cm = 3,64 m

83. Se forma una sucesión de círculos concéntricos en los que cada radio es la mitad del radio del círculo anterior. Si el primer círculo tiene un diámetro de 4 cm, halla la suma de las áreas de todos los círculos.

$$a_1 = 4\pi \text{ cm}^2$$

$$a_2 = \pi \text{ cm}^2$$

$$a_3 = \pi/4 \text{ cm}^2$$

Se obtiene una progresión geométrica de razón:

$$r = 1/4$$

$$S = \frac{4\pi}{1 - 1/4} = 16\pi/3 \text{ cm}^2 = 16,76 \text{ cm}^2$$

84. ¿Qué capital inicial es necesario tener depositado para que, a interés compuesto durante 3 años al 5% anual y con periodos de capitalización trimestrales, se acumule un capital final bruto de 29 692,10 €?

$$C = c \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t} \Rightarrow c = \frac{C}{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^t}$$

$$c = \frac{29692,1}{\left(1 + \frac{0,05}{4}\right)^{4 \cdot 3}} = \frac{29692,1}{1,0125^{12}}$$

$$c = 25580 \text{ €}$$

85. Calcula los años que ha estado depositado un capital de 45 000 € al 6,5% de interés simple si, una vez hecha la retención del 18% de Hacienda, se han generado 7 195,50 €

Interés bruto: $7\,195,50 : 0,82 = 8\,775 \text{ €}$

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow t = \frac{I}{c \cdot r}$$

$$t = \frac{8\,775}{45\,000 \cdot 0,065} = 3 \text{ años}$$

86. Una entidad financiera paga el 7,5% del dinero depositado si este se mantiene 3 años. Calcula, en los siguientes casos, cuánto se ganará al finalizar los tres años por una imposición de 10 000 € si Hacienda retiene el 18%:

- a) Los intereses se ingresan en una cuenta distinta.
b) Los intereses se ingresan en la misma cuenta.

a) El interés es simple.

El tanto por uno final: $0,075 \cdot 0,82 = 0,0615$

$$I = c \cdot r \cdot t$$

$$I = 10\,000 \cdot 0,0615 \cdot 3 = 1\,845 \text{ €}$$

b) El interés es compuesto.

$$C = c(1 + r)^t$$

$$C = 10\,000 \cdot 1,075^3 = 12\,423$$

Los intereses son: $12\,423 - 10\,000 = 2\,423 \text{ €}$

Con la retención de Hacienda:

$$2\,423 \cdot 0,82 = 1\,986,86 \text{ €}$$

87. Calcula el rédito al que se han depositado 12 000 € a interés simple durante 18 meses si los intereses generados, con la retención de Hacienda descontada, han sido de 664,20 €

Interés bruto: $664,20 : 0,82 = 810 \text{ €}$

$$I = c \cdot r \cdot \frac{t}{n} \Rightarrow r = \frac{I \cdot n}{c \cdot t}$$

$$r = \frac{810 \cdot 12}{12\,000 \cdot 18} = 0,045 \Rightarrow R = 4,5\%$$

PARA PROFUNDIZAR

88. Comprueba que las siguientes expresiones están en progresión aritmética y calcula el séptimo término: $x^2 - 2x + 1$, $x^2 + 1$ y $x^2 + 2x + 1$

$$d = a_2 - a_1 = x^2 + 1 - (x^2 - 2x + 1) = 2x$$

$$d = a_3 - a_2 = x^2 + 2x + 1 - (x^2 + 1) = 2x$$

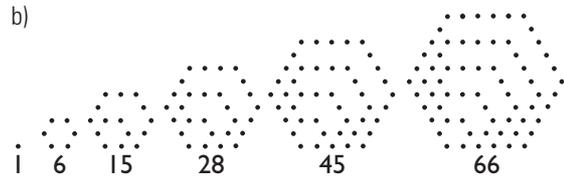
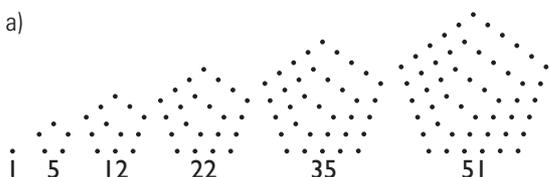
Están en progresión aritmética de diferencia: $d = 2x$

$$a_7 = a_1 + 6d = x^2 - 2x + 1 + 12x = x^2 + 10x + 1$$

89. En una progresión aritmética, el primer término y el décimocuarto suman 342. ¿Cuánto suman el quinto y el décimo término?

Los términos equidistantes de una progresión aritmética suman lo mismo. Luego sumarán 342

90. Continúa las siguientes series de números figurados hasta obtener tres términos más:



91. En una progresión aritmética el primer término es 2 y el undécimo es 52. Razona lo que vale el sexto término.

$$1 + 11 = 12; 12 : 2 = 6$$

El sexto término es el término central del primero y el undécimo. Luego:

$$a_6 = \frac{2 + 52}{2} = 27$$

92. La suma de los infinitos términos de una progresión decreciente es 6 y la suma de sus dos primeros términos es 16/3. Calcula el primer término.

$$6 = \frac{a_1}{1 - r} \Rightarrow a_1 = 6(1 - r)$$

$$a_1 + a_1 \cdot r = 16/3 \Rightarrow a_1(1 + r) = 16/3$$

Sustituyendo a_1 en la 2.ª ecuación:

$$6(1 - r)(1 + r) = 16/3$$

$$6(1 - r^2) = 16/3$$

$$r^2 = 1/9$$

$$r = \pm 1/3$$

$$\text{Si } r = 1/3 \Rightarrow a_1 = 4$$

$$\text{Si } r = -1/3 \Rightarrow a_1 = 8$$

93. De un vaso lleno de leche se vacía la mitad y se rellena de agua. Se retira la mitad del nuevo contenido y se vuelve a rellenar con agua. Si este proceso se repite seis veces, ¿qué parte de agua contiene el vaso?

La cantidad de leche y de agua que hay en el vaso es:

Leche	1	1/2	1/4	1/8	...
Agua	0	1/2	3/4	7/8	...

La cantidad de leche sigue una progresión geométrica de razón 1/2

$$a_6 = 1 \cdot (1/2)^5 = 1/32$$

La cantidad de agua es: 31/32

94. Un depósito ofrece un 4% de interés simple anual, renovable mensualmente y sin acumular los intereses en el depósito. ¿Cuánto tiempo se deben depositar 12 000 € para generar unos intereses netos, es decir, descontando el 18% de Hacienda, de 984 €?

Interés bruto: $984 : 0,82 = 1\,200 \text{ €}$

$$I = c \cdot r \cdot \frac{t}{n} \Rightarrow t = \frac{I \cdot n}{c \cdot r}$$

$$t = \frac{1\,200 \cdot 12}{12\,000 \cdot 0,04} = 30 \text{ meses}$$

95. Calcula el capital inicial que se debe depositar al 6% de interés compuesto con períodos de capitalización mensual para que, al cabo de 10 años, se conviertan en 33 204 € brutos.

$$C = c \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$$

$$c \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^{12 \cdot 10} = 33\,204$$

$$1,005^{120} c = 33\,204$$

$$c = 33\,204 : 1,005^{120}$$

$$c = 18\,250 \text{ €}$$

96. Calcula el tiempo que hay que tener un capital depositado en un banco al 5% con interés simple para que el capital se duplique.

$$I = c$$

$$c \cdot r \cdot t = c$$

$$r \cdot t = 1$$

$$t = \frac{1}{r}$$

$$t = \frac{1}{0,05} = 20 \text{ años}$$

APLICA TUS COMPETENCIAS

97. Calcula la cuota mensual que hay que pagar por una hipoteca de 10 000 € al 3,50% y contratada a 12 años.

$$\text{Cuota mensual: } 8,51 \cdot 10 = 85,1 \text{ €}$$

98. Calcula la cuota mensual que hay que pagar por una hipoteca de 25 000 € al 4,25% y contratada a 15 años.

$$\text{Cuota mensual: } 7,52 \cdot 25 = 188 \text{ €}$$

99. Calcula la hipoteca que se amortiza al 5,25% durante 10 años pagando 268,25 € de mensualidad.

$$\text{Hipoteca: } 268,25 : 10,73 = 25 \Rightarrow 25\,000 \text{ €}$$

100. Calcula la hipoteca que se amortiza al 5% durante 18 años pagando 210,9 € de mensualidad.

$$\text{Hipoteca: } 210,9 : 7,03 = 30 \Rightarrow 30\,000 \text{ €}$$

COMPRUEBA LO QUE SABES

1. Define progresión aritmética y pon un ejemplo.

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que cada término se halla sumando al término anterior un número constante que se llama **diferencia** y que se representa con la letra *d*

La diferencia *d* de una progresión aritmética se calcula restando dos términos consecutivos.

Ejemplo:

La sucesión 3, 7, 11, 15... es una progresión aritmética.

2. Encuentra el término general de las progresiones siguientes:

a) 7, 11, 15...

b) 3, -12, 48...

a) $a_1 = 7, d = 4$

$$a_n = 7 + 4(n-1) = 4n + 3$$

b) $a_1 = 3, r = -4$

$$a_n = 3 \cdot (-4)^{n-1}$$

3. Calcula los años que ha estado depositado un capital de 25 500 € al 6% de interés simple si, realizada la retención de Hacienda del 18%, se han generado 5 018,40 € de intereses.

$$\text{Interés bruto: } 5\,018,40 : 0,82 = 6\,120 \text{ €}$$

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow t = \frac{I}{c \cdot r}$$

$$t = \frac{6\,120}{25\,500 \cdot 0,06} = 4 \text{ años}$$

4. Calcula la suma de los 25 primeros términos de la progresión cuyo término general es $a_n = 4n - 3$

Es una progresión aritmética:

$$a_1 = 1, d = 4$$

$$a_{25} = 4 \cdot 25 - 3 = 97$$

$$S_{25} = \frac{1 + 97}{2} \cdot 25 = 1\,225$$

5. Halla la razón y el primer término de una progresión geométrica en la que el segundo término vale 6 y el quinto 162

$$a_5 = r^{5-2} \Rightarrow \frac{162}{6} = r^3$$

$$r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \text{ para } n = 2$$

$$a_2 = a_1 \cdot 3^{2-1} \Rightarrow 6 = a_1 \cdot 3 \Rightarrow a_1 = 2$$

6. Calcula la suma de los infinitos términos de la siguiente progresión: 1/10, 1/100...

$$a_1 = 1/10, r = 1/10$$

$$S = \frac{1/10}{1 - 1/10} = 1/9$$

7. Se depositan 6 500 € al 5% de interés compuesto durante 4 años. Hacienda retiene el 18% de los intereses cuando se recupera el capital. Calcula el capital final si los intereses se abonan anualmente.

$$C = c(1 + r)^t$$

$$C = 6\,500 \cdot 1,05^4 = 7\,900,79 \text{ €}$$

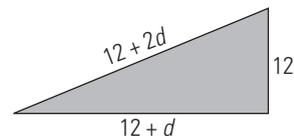
$$\text{Los intereses son: } 7\,900,79 - 6\,500 = 1\,400,79 \text{ €}$$

$$\text{Hacienda retiene: } 1\,400,79 \cdot 0,18 = 252,14 \text{ €}$$

El capital final neto será:

$$7\,900,79 - 252,14 = 7\,648,65 \text{ €}$$

8. Los lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética. Calcula su longitud sabiendo que el menor mide 12 cm



$$(12 + 2d)^2 = (12 + d)^2 + 12^2$$

$$3d^2 + 24d - 144 = 0$$

$$d^2 + 8d - 48 = 0$$

$$d = 4 \text{ (} d = -12 \text{ no es válida)}$$

Los lados son:

$$12, 16 \text{ y } 20$$

WINDOWS/LINUX 

PASO A PASO

101. Calcula los cinco primeros términos de la siguiente sucesión:

$$a_n = 4n - 1$$

Resuelto en el libro del alumnado.

102. Dada la sucesión 3, 7, 11...

Calcula si es aritmética o geométrica, halla la diferencia o razón y el término general.

Resuelto en el libro del alumnado.

103. Dada la siguiente sucesión, calcula la suma de los 25 primeros términos: $a_n = 7n - 5$

Resuelto en el libro del alumnado.

104. Calcula los 5 primeros términos de la sucesión: $a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$

Resuelto en el libro del alumnado.

105. Dada la sucesión 3, 6, 12...

Calcula si es aritmética o geométrica, halla la diferencia o razón y e término general.

Resuelto en el libro del alumnado.

106. Dada la sucesión $a_n = 3 \cdot 2^n$, calcula la suma de los siete primeros términos.

Resuelto en el libro del alumnado.

107. Dada la siguiente sucesión, calcula la suma de todos sus términos: 3, 1, 1/3...

Resuelto en el libro del alumnado.

108. En la progresión $a_n = 3n + 4$, ¿qué término vale 52?

Resuelto en el libro del alumnado.

109. En una progresión geométrica, $a_3 = 18$ y $a_7 = 1458$. Halla el primer término y la razón de la progresión.

Resuelto en el libro del alumnado.

110. Se depositan 1000 € al 5% de interés compuesto durante 3 años. ¿Qué capital tendremos al finalizar ese tiempo?

Resuelto en el libro del alumnado.

PRACTICA

111. Calcula los ocho primeros términos de las siguientes sucesiones:

- a) $a_n = 4^n + 2$
- b) $a_n = 3n^2 - 5n + 2$
- c) $a_n = 4 \cdot (-2/3)^n$
- d) $a_n = (-2)^n$

- a) 6, 18, 66, 258, 1026, 4098, 16386, 65538
- b) 0, 4, 14, 30, 52, 80, 114, 154
- c) $-8/3, 16/9, -32/27, 64/81, -128/243, 256/729, -512/2187, 1024/6561$
- d) $-2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256$

112. En las siguientes sucesiones calcula si son aritméticas o geométricas, halla la diferencia o razón y el término general.

- a) 12, 20, 28...
- b) 14, 4, -6...
- c) 5, 15, 45...
- d) 6, 3, 3/2...

- a) Aritmética, $d = 8, a_n = 8n + 4$
- b) Aritmética, $d = -10, a_n = -10n + 24$
- c) Geométrica, $r = 3, a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$
- d) Geométrica, $r = 1/2, a_n = 6 \cdot (1/2)^{n-1}$

113. Calcula la suma de los 125 primeros términos de la progresión aritmética cuyo término general es $a_n = 4n/5 + 2/3$

$$S = 19150/3$$

114. Calcula la suma de los siete primeros términos de la progresión geométrica cuyo término general es $a_n = 3 \cdot 2^n$

$$S_{11} = 762$$

115. Calcula la suma de los infinitos términos de la siguiente progresión:

$$8, 4, 2, \dots$$

$$S = 16$$

116. En una progresión geométrica $a_4 = 135$ y $a_6 = 1215$. Halla el primer término y la razón de la progresión.

$$\frac{a_6}{a_4} = r^{6-2} \Rightarrow \frac{1215}{135} = r^2 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = \pm 3$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow 135 = a_1 \cdot (-3)^3 \Rightarrow a_1 = -5$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow 135 = a_1 \cdot 3^3 \Rightarrow a_1 = 5$$

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris:

117. ¿Qué término vale -47 en la siguiente progresión? 9, 5, 1...

$$a_n = -4n + 13$$

$$-4n + 13 = -47$$

$$n = 15$$

118. En una progresión aritmética conocemos los términos $a_6 = 23/6$ y $a_9 = 35/6$. Calcula la diferencia y el primer término.

$$\left. \begin{aligned} a + 5d &= 23/6 \\ a + 8d &= 35/6 \end{aligned} \right\}$$

$$a_1 = 1/2$$

$$d = 2/3$$

119. ¿Qué término vale 1/2048 en la siguiente progresión geométrica?

$$8, 2, 1/2, \dots$$

$$a_1 = 8, r = \frac{1}{4}$$

$$8(1/4)^{n-1} = 1/2048 \Rightarrow n = 8$$

120. Encuentra la razón de la progresión geométrica que tiene los siguientes términos:

$$a_4 = 32/9 \text{ y } a_6 = 512/81$$

$$r^2 = (512/81)/(32/9)$$

$$r = \pm 4/3$$

- 121. Se depositan 2 000 € durante 3 años a un 5% de interés simple. Si Hacienda retiene un 18% de los intereses, ¿qué interés se obtiene al acabar dicho período?**

El tanto por uno será: $0,05 \cdot 0,82 = 0,041$

$$I = c \cdot r \cdot t = 2\,000 \cdot 0,041 \cdot 3 = 246 \text{ €}$$

- 122. Se depositan 3 000 € a un interés compuesto del 7% durante 3 años con períodos de capitalización mensuales. Si Hacienda retiene el 18% cuando se recupera el capital, calcula el capital final.**

El capital final será:

$$C = c \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t} \Rightarrow C = 3\,698,78 \text{ €}$$

Los intereses son:

$$3\,698,78 - 3\,000 = 698,78 \text{ €}$$

Hacienda retiene:

$$698,78 \cdot 0,18 = 125,78 \text{ €}$$

El capital final neto será:

$$3\,698,78 - 125,78 = 3\,573 \text{ €}$$

4. Proporcionalidad

1. RAZONES Y PROPORCIONES

PIENSA Y CALCULA

Se han comprado 5 kg de melocotones por 10,5 €. Calcula mentalmente cuánto cuesta cada kilo.

$$10,5 : 5 = 2,1 \text{ €/kg}$$

CARNÉ CALCULISTA

Calcula con dos decimales: 72,85 : 26,4

$$C = 2,75; R = 0,25$$

APLICA LA TEORÍA

1. Calcula las razones entre las cantidades siguientes e interpreta el resultado:

- a) 3,5 kg de naranjas cuestan 6,3 €
- b) Un coche en 5 horas recorre 400 km
- c) 12 m de tela cuestan 90 €
- d) En 7 días se consumen 3,5 kg de fruta.

- a) $6,3/3,5 = 1,8 \text{ €/kg}$
El kilo de naranjas cuesta 1,8 €
- b) $400/5 = 80 \text{ km/h}$
El coche lleva una velocidad media de 80 km/h
- c) $90/12 = 7,5 \text{ €/m}$
El metro de tela cuesta 7,5 €
- d) $3,5/7 = 0,5 \text{ kg/día}$
Se hace un consumo medio de 0,5 kg/día

2. Calcula las razones entre las siguientes cantidades e interpreta el resultado:

- a) Una finca mide 120 ha, y otra, 180 ha
- b) Juan mide 160 cm, y María, 168 cm
- c) Un tren va a 120 km/h, y otro, a 180 km/h
- d) Una botella contiene 2 L, y otra, 1,5 L

- a) $180/120 = 1,5$
El área de la segunda finca es 1,5 veces el área de la primera.
- b) $168/160 = 1,05$
La estatura de María es 1,05 la de Juan.
- c) $180/120 = 1,5$
La velocidad del segundo tren es 1,5 la velocidad del primero.
- d) $1,5/2 = 0,75$
La capacidad de la segunda botella es 0,75 veces la capacidad de la primera.

3. Calcula mentalmente y completa en tu cuaderno para que formen proporción:

a) $\frac{5}{9} = \frac{\square}{36}$ b) $\frac{\square}{9} = \frac{12}{54}$

c) $\frac{2}{\square} = \frac{3}{4,5}$ d) $\frac{2}{0,9} = \frac{10}{\square}$

a) $\frac{5}{9} = \frac{20}{36}$ b) $\frac{2}{9} = \frac{12}{54}$

c) $\frac{2}{3} = \frac{3}{4,5}$ d) $\frac{2}{0,9} = \frac{10}{4,5}$

4. Calcula el cuarto proporcional:

a) $\frac{x}{8} = \frac{5}{2}$ b) $\frac{0,5}{9} = \frac{6,4}{x}$

c) $\frac{4,5}{7,8} = \frac{x}{5,2}$ d) $\frac{2,5}{x} = \frac{1,4}{2,8}$

a) $x = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20$ b) $x = \frac{2,5 \cdot 6,4}{0,5} = 32$

c) $x = \frac{4,5 \cdot 5,2}{7,8} = 3$ d) $x = \frac{2,5 \cdot 2,8}{1,4} = 5$

5. Calcula el medio proporcional:

a) $\frac{10}{x} = \frac{x}{3,6}$ b) $\frac{2,5}{x} = \frac{x}{6,4}$

a) $x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$ b) $x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

2. MAGNITUDES PROPORCIONALES

PIENSA Y CALCULA

Cuatro amigos han pagado 18 € por las entradas del cine. Calcula mentalmente cuánto cuesta cada entrada.

$$18 : 4 = 4,5 \text{ €}$$

CARNÉ CALCULISTA

Calcula: $\frac{4}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} + \frac{3}{5} = \frac{11}{10}$

APLICA LA TEORÍA

6. Si 8 cintas de vídeo cuestan 212 €, ¿cuántas cintas se pueden comprar con 371 €?

Dinero (€)	(D)	N.º cintas de video
212	—————→	8
371	—————→	x

$$\frac{212}{371} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 14 \text{ cintas}$$

7. Una tubería de 15 m de longitud pesa 210 kg. ¿Cuál será la longitud de una tubería que pesa 308 kg si es del mismo material y de la misma sección?

Peso (kg)	(D)	Longitud (m)
210	—————→	15
308	—————→	x

$$\frac{210}{308} = \frac{15}{x} \Rightarrow x = 22 \text{ m}$$

8. Nueve bombillas iguales han consumido un total de 54 kWh. Si en las mismas condiciones encendemos 15 bombillas iguales, ¿cuántos kWh se consumirán?

N.º bombillas	(D)	Consumo (kWh)
9	—————→	54
15	—————→	x

$$\frac{9}{15} = \frac{54}{x} \Rightarrow x = 14 \text{ cintas}$$

9. Cuatro amigos se reparten el alquiler de un apartamento de verano. Cada uno paga 375 €. Si se uniesen dos amigos más, ¿cuánto pagaría cada uno?

N.º amigos	(I)	Dinero (€)
4	→	375
6	→	x
$\frac{6}{4} = \frac{375}{x} \Rightarrow x = 250 \text{ €}$		

10. Un coche recorre un trayecto en 1 hora y media a 65 km/h. Si desea tardar 75 minutos, ¿a qué velocidad deberá recorrer el mismo trayecto?

Tiempo (min)	(I)	Velocidad (km/h)
90	→	65
75	→	x
$\frac{75}{90} = \frac{65}{x} \Rightarrow x = 78 \text{ km/h}$		

11. Con tres grifos se llena un depósito en 20 horas. ¿Cuánto tiempo se tardará en llenar el mismo depósito con cinco grifos iguales a los anteriores?

N.º grifos	(I)	Tiempo (h)
3	→	20
5	→	x
$\frac{5}{3} = \frac{20}{x} \Rightarrow x = 12 \text{ horas}$		

3. PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

PIENSA Y CALCULA

Analiza en la siguiente situación si la cantidad de dinero es directa o inversamente proporcional al número de obreros y al número de días:

Si ocho obreros trabajan durante 12 días y ganan un total de 3 400 €, ¿cuánto ganarán seis obreros trabajando 10 días?

- N.º de obreros y cantidad de dinero es directa.
- N.º de días y cantidad de dinero es directa.

CARNÉ CALCULISTA

Calcula con dos decimales: 342,5 : 0,96

$C = 356,77; R = 0,0008$

APLICA LA TEORÍA

12. Durante 30 días seis obreros han canalizado 150 m de tubería para suministro de agua. Calcula cuántos metros canalizarán catorce obreros en 24 días.

(D)		
↓	↓	↓
Tiempo (días)	N.º obreros	Longitud (m)
30	6	150
24	14	x
$\frac{30}{24} \cdot \frac{20}{14} = \frac{150}{x} \Rightarrow x = 280 \text{ m}$		

13. Los gastos de alimentación de 135 personas suponen 2 250 € diarios. Calcula cuántas personas podrán alimentarse durante 90 días con 12 000 €

(D)		
↓	↓	↓
Dinero (€)	Tiempo (días)	N.º personas
2 250	1	135
12 000	90	x
$\frac{2 250}{12 000} \cdot \frac{90}{1} = \frac{135}{x} \Rightarrow x = 8 \text{ personas}$		

14. Una persona lee 2 horas diarias a razón de 5 páginas por hora, y tarda 15 días en leer un libro. Si leyese 3 horas diarias a razón de 8 páginas por hora, ¿cuántos días tardaría en leer el mismo libro?

(I)		
↓	↓	↓
Tiempo (h)	Páginas/hora	Tiempo (días)
2	5	15
3	8	x
$\frac{3}{2} \cdot \frac{8}{5} = \frac{15}{x} \Rightarrow x = 6,25 \text{ días}$		

15. Calcula el interés producido por un capital de 9 000 € al 5,5% en 3 años.

$I = c \cdot r \cdot t$
 $I = 9 000 \cdot 0,055 \cdot 3 = 1 485 \text{ €}$

16. ¿Qué capital se debe depositar al 5% para que después de 2 años produzca 400 €?

$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow c = \frac{I}{r \cdot t}$
 $c = \frac{400}{0,05 \cdot 2} = 4 000 \text{ €}$

17. ¿A qué rédito se debe depositar un capital de 6 500 € para que produzca un interés de 526,5 € en 18 meses?

$I = \frac{c \cdot r \cdot t}{n} \Rightarrow r = \frac{I \cdot n}{c \cdot t}$
 $r = \frac{526,5 \cdot 12}{6 500 \cdot 18} = 0,054$
 $R = 5,4 \%$

18. ¿Cuántos meses se deben tener depositados 25 000 € al 4,5% para que produzcan unos intereses de 1 687,5 €?

$I = \frac{c \cdot r \cdot t}{n} \Rightarrow t = \frac{I \cdot n}{c \cdot r}$
 $t = \frac{1 687,5 \cdot 12}{25 000 \cdot 0,045} = 18 \text{ meses}$

4. PROBLEMAS ARITMÉTICOS

PIENSA Y CALCULA

Reparte mentalmente 600 € de forma proporcional a 1, 2 y 3

$1 + 2 + 3 = 6$
 $600 : 6 = 100 \text{ €}$

$100 \cdot 1 = 100 \text{ €}$
 $100 \cdot 2 = 200 \text{ €}$
 $100 \cdot 3 = 300 \text{ €}$

CARNÉ CALCULISTA

Calcula: $\left(\frac{3}{5} - 2\right) : \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{4}\right) = 4$

APLICA LA TEORÍA

19. Reparte 15 000 € en partes directamente proporcionales a 2, 3 y 5

$15\,000 : (2 + 3 + 5) = 1\,500$
 $x = 1\,500 \cdot 2 = 3\,000 \text{ €}$
 $y = 1\,500 \cdot 3 = 4\,500 \text{ €}$
 $z = 1\,500 \cdot 5 = 7\,500 \text{ €}$

20. Reparte 11 050 € en partes inversamente proporcionales a 2, 3 y 4

m.c.m. (2, 3, 4) = 12
 $1/2 = 6/12, 1/3 = 4/12, 1/4 = 3/12$
 Se reparte directamente proporcional a 6, 4 y 3 respectivamente.
 $11\,050 : (6 + 4 + 3) = 850$
 $x = 850 \cdot 6 = 5\,100 \text{ €}$
 $y = 850 \cdot 4 = 3\,400 \text{ €}$
 $z = 850 \cdot 3 = 2\,550 \text{ €}$

21. A un trabajador le descuentan mensualmente de su nómina el 5% para un seguro que asciende a 1 440 €. ¿Qué cantidad le descuentan?

Descuentan: $1\,440 \cdot 0,05 = 72 \text{ €}$

22. En la factura de un taller aplican un 16% de IVA sobre un importe de 168 €. ¿Cuánto se paga en total?

Total: $168 \cdot 1,16 = 194,88 \text{ €}$

23. En una mezcla de 500 g de café, 100 g son de torrefacto y el resto es de café natural. ¿Qué porcentaje de café torrefacto lleva la mezcla?

$100/500 = 0,2 = 20\%$ de torrefacto.

24. En una factura de 350 € nos aplican un 20% de descuento y un 16% de IVA. Calcula el importe total de la factura.

Total: $350 \cdot 0,8 \cdot 1,16 = 324,8 \text{ €}$

25. En una tienda compramos un televisor con una rebaja del 20% y nos cobran el 16% de IVA. Si pagamos 232 € por él, ¿cuál era el precio inicial del televisor?

Precio inicial: $232 : (0,8 \cdot 1,16) = 250 \text{ €}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. RAZONES Y PROPORCIONES

26. Determina el valor de las razones formadas por los siguientes pares de cantidades, e interpreta el resultado:

- a) 7 m de cinta cuestan 14 €
- b) En 3 horas se recorren 120 km
- c) Una varilla mide 10 dm, y otra, 14 dm
- d) Un recipiente tiene 5 L, y otro, 150 L

- a) $14/7 = 2 \text{ €/m}$
El metro de tela vale 2 €
- b) $120/3 = 40 \text{ km/h}$
La velocidad media es de 40 km/h
- c) $14/10 = 1,4$
La varilla más larga es 1,4 veces la pequeña.
- d) $150/5 = 30$
El recipiente de mayor capacidad es 30 veces la capacidad del pequeño.

27. Determina si los siguientes pares de razones forman proporción y calcula la constante de proporcionalidad:

a) $\frac{15 \text{ m}}{3 \text{ m}} \quad \frac{10 \text{ días}}{2 \text{ días}} \quad \text{b) } \frac{51}{121} \quad \frac{1,5}{4}$

- a) $15/3 = 10/2 = 5$
- b) $51 \cdot 4 \neq 121 \cdot 1,5 \Rightarrow$ No forman proporción.

28. Escribe las proporciones que puedas obtener con las razones siguientes y calcula su constante de proporcionalidad:

a) $\frac{8}{0,5} \quad \text{b) } \frac{2,5}{6} \quad \text{c) } \frac{24}{1,5} \quad \text{d) } \frac{1,5}{4}$

$\frac{8}{0,5} = \frac{24}{1,5} = 16$

29. Calcula el cuarto proporcional:

a) $\frac{x}{14} = \frac{3}{7} \quad \text{b) } \frac{3}{2,4} = \frac{2}{x} \quad \text{c) } \frac{0,3}{0,5} = \frac{x}{3,5}$

a) $x = \frac{3 \cdot 14}{7} = 6$

b) $x = \frac{2,4 \cdot 2}{3} = 1,6$

c) $x = \frac{0,3 \cdot 3,5}{0,5} = 2,1$

30. Calcula el medio proporcional:

a) $\frac{8}{x} = \frac{x}{18} \quad \text{b) } \frac{0,3}{x} = \frac{x}{2,7}$

- a) $x^2 = 144 \Rightarrow x = \pm 12$
- b) $x^2 = 0,81 \Rightarrow x = \pm 0,9$

2. MAGNITUDES PROPORCIONALES

31. Las ruedas delanteras de un tractor tienen un diámetro de 0,9 m y las traseras tienen un diámetro de 1,2 m. Si en un trayecto las ruedas delanteras han dado 250 vueltas, ¿cuántas vueltas habrán dado las traseras?

Longitud (m)	(l)	N.º de vueltas
9	—————→	250
1,2	—————→	x

$\frac{1,2}{0,9} = \frac{250}{x} \Rightarrow x = 187,5 \text{ vueltas.}$

32. Con 100 kg de harina se hacen 120 kg de pan. Calcula la harina necesaria para elaborar un pan de 120 g

Peso de pan (kg)	(D)	Peso de harina (kg)
120	→	100
0,12	→	x
$\frac{120}{0,12} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = 0,1 \text{ kg} = 100 \text{ g}$		

33. Un grifo vierte 25 litros por minuto y tarda 2 horas en llenar un depósito. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar el mismo depósito otro grifo que vierte 40 litros por minuto?

Caudal (l/min)	(D)	Tiempo (h)
25	→	2
40	→	x
$\frac{40}{25} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 1 \text{ h } 15 \text{ min}$		

3. PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

34. ¿Qué interés produce un capital de 27 000 € al 3,5% durante 2 años?

$I = c \cdot r \cdot t$
 $I = 27\,000 \cdot 0,035 \cdot 2 = 1\,890 \text{ €}$

35. El precio por transportar 1 500 kg de mercancía a una distancia de 100 km es de 80 €. ¿Qué precio se pagará por transportar 4 500 kg a 250 km?

Peso (kg)	Longitud (km)	Dinero (€)
1 500	100	80
4 500	250	x
$\frac{1\,500}{4\,500} \cdot \frac{100}{250} = \frac{80}{x} \Rightarrow x = 600 \text{ €}$		

36. Ocho grifos abiertos 12 horas diarias han vertido agua por valor de 24 €. ¿Qué coste de agua se tendrá con 12 grifos abiertos 15 horas diarias durante el mismo período de tiempo?

N.º de grifos	Tiempo (h)	Dinero (€)
8	12	24
12	15	x
$\frac{8}{12} \cdot \frac{12}{15} = \frac{24}{x} \Rightarrow x = 45 \text{ €}$		

37. Una familia de 5 miembros puede mantenerse durante 8 meses con 5 000 €. ¿Cuántas personas podrían mantenerse durante 15 meses con 30 000 €?

Dinero (€)	Tiempo (meses)	N.º de personas
5 000	8	5
30 000	15	x
$\frac{5\,000}{30\,000} \cdot \frac{15}{8} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 16 \text{ personas}$		

38. Calcula el capital que hay que depositar al 3% durante 20 meses para que genere un interés de 350 €

$I = \frac{c \cdot r \cdot t}{n} \Rightarrow c = \frac{I \cdot n}{r \cdot t}$
 $c = \frac{350 \cdot 12}{0,03 \cdot 20} = 7\,000 \text{ €}$

39. ¿Cuántos días debe estar un capital de 18 000 € al 4% de interés para obtener 500 €?

$I = \frac{c \cdot r \cdot t}{n} \Rightarrow t = \frac{I \cdot n}{r \cdot c}$
 $t = \frac{500 \cdot 360}{18\,000 \cdot 0,04} = 250 \text{ días}$

4. PROBLEMAS ARITMÉTICOS

40. Reparte 13 500 € en partes directamente proporcionales a 4, 6 y 8

$13\,500 : (4 + 6 + 8) = 750$
 $x = 750 \cdot 4 = 3\,000 \text{ €}$
 $y = 750 \cdot 6 = 4\,500 \text{ €}$
 $z = 750 \cdot 8 = 6\,000 \text{ €}$

41. Reparte 11 750 € en partes inversamente proporcionales a 3, 4 y 5

m.c.m.(3, 4, 5) = 60
 $\frac{1}{3} = \frac{20}{60}, \frac{1}{4} = \frac{15}{60}, \frac{1}{5} = \frac{12}{60}$
 Se reparte directamente proporcional a 20, 15 y 12, respectivamente.
 $11\,750 : (20 + 15 + 12) = 250$
 $x = 250 \cdot 20 = 5\,000 \text{ €}$
 $y = 250 \cdot 15 = 3\,750 \text{ €}$
 $z = 250 \cdot 12 = 3\,000 \text{ €}$

42. A un conductor le han puesto una multa de tráfico de 150 €. Si la paga antes de un mes, se le aplica un 20% de descuento. ¿Cuánto pagará por la multa?

Pagaría: $150 \cdot 0,8 = 120 \text{ €}$

43. En una tienda venden un determinado artículo ganando el 30% sobre el precio de coste. Si dicho precio era de 145 €, ¿cuál es el precio de venta?

Precio de venta: $145 \cdot 1,3 = 188,5 \text{ €}$

44. Un librero vende 144 libros de los 480 que tenía. ¿Qué porcentaje suponen del total de libros los que ha vendido?

$144/480 = 3/10 = 0,3 = 30\%$

45. A un trabajador que cobra 1 100 € mensualmente le suben su salario un 2%. Al año siguiente, le suben nuevamente un 2,5%. Calcula el salario mensual después de las dos subidas.

Salario: $1\,100 \cdot 1,02 \cdot 1,025 = 1\,150,05 \text{ €}$

46. En una tienda tienen una oferta de un 15% de descuento si se compran los jamones enteros. Si el precio del jamón está en 12 €/kg y aumentan la factura en un 7% de IVA, calcula el precio de un jamón de 10 kg

Precio: $10 \cdot 12 \cdot 0,85 \cdot 1,07 = 109,14 \text{ €}$

PARA AMPLIAR

47. Forma una proporción en la que figuren los siguientes datos: 5 g, 15 g y 3 horas.

$$\frac{5}{15} = \frac{3}{9}$$

48. Pintar una casa de 60 m² cuesta 720 € y pintar una casa de 120 m² cuesta 1 440 €. Expresa esta situación en forma de proporción.

$$\frac{60}{120} = \frac{720}{1\,440}$$

49. Calcula el cuarto proporcional:

a) $\frac{x}{9} = \frac{21}{7}$ b) $\frac{1,5}{1,2} = \frac{6}{x}$ c) $\frac{3,6}{x} = \frac{7,2}{6}$

a) $x = \frac{9 \cdot 21}{7} = 27$

b) $x = \frac{6 \cdot 1,2}{1,5} = 4,8$

c) $x = \frac{3,6 \cdot 6}{7,2} = 3$

50. Calcula el medio proporcional:

a) $\frac{36}{x} = \frac{x}{81}$ b) $\frac{7}{x} = \frac{x}{28}$

a) $x^2 = 2\,916 \Rightarrow x = \pm 54$

b) $x^2 = 196 \Rightarrow x = \pm 14$

51. Un granjero tiene alimento para 1 200 conejos durante 180 días. Si vende 300 conejos, ¿durante cuántos días tendrá alimento para los conejos que quedan si no varía la ración?

N.º de conejos	(I)	Tiempo (días)
1 200	→	180
900	→	x

$$\frac{900}{1\,200} = \frac{180}{x} \Rightarrow x = 240 \text{ días}$$

52. Para hacer 120 kg de masa de bollería se necesitan 600 gramos de levadura. ¿Qué cantidad de levadura se necesitará para hacer 250 kg de masa?

Peso de bollo (kg)	(D)	Peso de levadura (kg)
120	→	0,6
250	→	x

$$\frac{120}{250} = \frac{0,6}{x} \Rightarrow x = 1,25 \text{ kg}$$

53. Una rueda de 15 dientes está engranada a otra rueda de 52 dientes. Si la primera da 156 revoluciones por minuto, ¿cuántas revoluciones por minuto dará la segunda rueda?

N.º de dientes	(I)	Velocidad (rpm)
15	→	156
52	→	x

$$\frac{52}{15} = \frac{156}{x} \Rightarrow x = 45 \text{ rpm}$$

54. Veinte obreros asfaltan un tramo de carretera en 60 días. ¿Cuántos obreros harán falta para asfaltar el mismo tramo de carretera en 40 días?

Tiempo (días)	(I)	N.º de obreros
60	→	20
40	→	x

$$\frac{40}{60} = \frac{20}{x} \Rightarrow x = 30 \text{ obreros}$$

55. Para hacer una obra en 360 días hacen falta 30 obreros trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántos días duraría la misma obra si hubiese 40 obreros trabajando 6 horas diarias?

N.º de obreros	Tiempo diario (h)	Tiempo (días)
30	→	360
40	→	x

$$\frac{40}{30} \cdot \frac{6}{8} = \frac{360}{x} \Rightarrow x = 360 \text{ días}$$

56. Transportar 200 cajas a 450 km tiene un coste de 300 €. ¿Cuántas cajas pueden transportarse a 280 km por 350 €?

Longitud (km)	Dinero (€)	N.º de cajas
450	→	200
280	→	x

$$\frac{280}{450} \cdot \frac{300}{350} = \frac{200}{x} \Rightarrow x = 375 \text{ cajas}$$

57. Cinco grifos llenan un depósito de 20 000 litros en 16 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán ocho grifos iguales a los anteriores en llenar un depósito de 30 000 litros?

N.º de grifos	Capacidad (l)	Tiempo (h)
5	→	16
8	→	x

$$\frac{8}{5} \cdot \frac{20\,000}{30\,000} = \frac{16}{x} \Rightarrow x = 15 \text{ horas}$$

58. ¿Qué interés generará un capital de 2 500 € durante 9 meses al 3% anual?

$$I = \frac{c \cdot r \cdot t}{n}$$

$$I = \frac{2\,500 \cdot 0,03 \cdot 9}{12} = 56,25 \text{ €}$$

59. ¿Durante cuántos meses se deben depositar 2 000 € al 4,5% de rédito para obtener 105 € de interés?

$$I = \frac{c \cdot r \cdot t}{n} \Rightarrow t = \frac{I \cdot n}{c \cdot r}$$

$$t = \frac{105 \cdot 12}{2\,000 \cdot 0,045} = 14 \text{ meses}$$

60. ¿A qué rédito se deben depositar 5 400 € durante 180 días para obtener 81 €?

$$I = \frac{c \cdot r \cdot t}{n} \Rightarrow r = \frac{I \cdot n}{c \cdot t}$$

$$r = \frac{81 \cdot 360}{5\,400 \cdot 180} = 0,03 \Rightarrow R = 3\%$$

61. Un padre reparte 13 440 € entre sus tres hijos en partes inversamente proporcionales a sus edades, que son 5, 12 y 15 años. Calcula la parte que le corresponde a cada uno.

m.c.m. (5, 12, 15) = 60
 $1/5 = 12/60, 1/12 = 5/60, 1/15 = 4/60$
 Se reparte de forma directamente proporcional a 12, 5 y 4 respectivamente.
 $13\,440 : (12 + 5 + 4) = 640$
 $x = 640 \cdot 12 = 7\,680 \text{ €}$
 $y = 640 \cdot 5 = 3\,200 \text{ €}$
 $z = 640 \cdot 4 = 2\,560 \text{ €}$

62. Tres amigos organizan una peña para jugar a las quinielas y aportan 23, 34 y 41 €. Si aciertan una quiniela por la que cobran 120 540 €, ¿qué cantidad le corresponde a cada uno si el reparto se hace de forma directamente proporcional al dinero aportado?

$120\,540 : (23 + 34 + 41) = 1\,230$
 $x = 1\,230 \cdot 23 = 28\,290 \text{ €}$
 $y = 1\,230 \cdot 34 = 41\,820 \text{ €}$
 $z = 1\,230 \cdot 41 = 50\,430 \text{ €}$

63. Si el 80% de una masa de bollería es harina, calcula cuánta harina contiene un bollo de 300 gramos.

Cantidad de harina: $300 \cdot 0,8 = 240 \text{ g}$

64. En la mezcla de un desinfectante hay un 90% de alcohol. Calcula cuánto alcohol hay en 200 mL de dicha mezcla.

Cantidad de alcohol: $200 \cdot 0,9 = 180 \text{ mL}$

65. En la factura de 105 € de la librería nos cargan un 4% de IVA. ¿A cuánto asciende el total de la factura?

Total de la factura: $105 \cdot 1,04 = 109,20 \text{ €}$

66. En unos pantalones de 72 € nos aplican un descuento del 20%. Calcula cuánto se paga por el pantalón.

Precio final: $72 \cdot 0,8 = 57,60 \text{ €}$

67. A un trabajador que gana 1 502,5 € le aplican un 18% de retención para pagar impuestos. ¿A cuánto asciende dicha retención?

Retención: $1\,502,5 \cdot 0,18 = 270,45 \text{ €}$

PROBLEMAS

68. La razón de dos números es 3/2. Si el mayor de ellos es 36, calcula el otro.

$\frac{3}{2} = \frac{36}{x} \Rightarrow x = 24$

69. La razón de alturas de dos postes es igual a la de sus sombras. La altura del primer poste es de 12 m, y su sombra, de 20 m. Si la sombra del segundo poste es de 24 m, ¿cuál será su altura?

$\frac{20}{24} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = 14,4 \text{ m}$

70. La suma de dos números es 21. Si uno de ellos es proporcional a 3 y el otro a 4, calcula dichos números.

$21 : (3 + 4) = 3$

1.º número = $3 \cdot 3 = 9$
 2.º número = $4 \cdot 3 = 12$

71. Un granjero tiene pienso para 1 200 gallinas durante 120 días. Si al cabo de 50 días vende 500 gallinas, ¿durante cuántos días tendrá alimento para las gallinas que quedan si no varía la ración?

N.º de gallinas	(I)	Tiempo (días)
1 200	—————>	70
700	—————>	x

 $\frac{700}{1\,200} = \frac{70}{x} \Rightarrow x = 120 \text{ días}$

72. Una mecanógrafa que escribe 140 palabras por minuto tarda 12 horas en hacer un trabajo. ¿A qué velocidad debe escribir si quiere tardar 10 horas?

Tiempo (h)	(I)	Velocidad (ppm)
12	—————>	140
10	—————>	x

 $\frac{10}{12} = \frac{140}{x} \Rightarrow x = 168 \text{ palabras/min}$

73. Seis personas han consumido 16 m³ de agua. ¿Cuántos metros cúbicos de agua consumirán 15 personas manteniendo el mismo gasto por persona?

N.º de personas	(D)	Volumen (m³)
6	—————>	16
15	—————>	x

 $\frac{6}{15} = \frac{16}{x} \Rightarrow x = 40 \text{ m}^3$

74. Un transportista cobra 900 € por trasladar una carga a 35 km de distancia. ¿Cuánto cobrará por trasladar la misma carga a 105 km?

Longitud (km)	(D)	Dinero (€)
35	—————>	900
105	—————>	x

 $\frac{35}{105} = \frac{900}{x} \Rightarrow x = 2\,700 \text{ €}$

75. Una persona ha realizado 1/3 de una obra en 6 días trabajando 8 horas diarias. Si hubiera trabajado 2 horas más cada día, ¿en cuántos días habría terminado la obra?

Haría toda la obra en 18 días trabajando 8 horas diarias.

Tiempo (h/día)	(I)	Tiempo (días)
8	—————>	18
10	—————>	x

 $\frac{10}{8} = \frac{18}{x} \Rightarrow x = 14,4 \text{ días}$

76. Para hacer 100 kg de masa de pan se necesitan 1/2 kg de levadura, 59,5 kg de harina y 40 kg de agua. ¿Cuántos kilos de harina se necesitarán para hacer 350 kg de pan?

Peso de pan (kg)	(D)	Peso de harina (kg)
100	→	59,5
350	→	x

$$\frac{100}{350} = \frac{59,5}{x} \Rightarrow x = 208,25 \text{ kg}$$

77. En un barco una tripulación de 400 personas tiene provisiones para 63 días tomando una ración de 1960 g. Si la tripulación descendiese a 140 personas, ¿qué ración correspondería a cada persona para que las provisiones durasen 80 días?

N.º personas	(I)	Tiempo (días)	(I)	Ración (g)
400	→	63	→	1960
140	→	80	→	x

$$\frac{140 \cdot 80}{400 \cdot 63} = \frac{1960}{x} \Rightarrow x = 4410 \text{ g}$$

78. Ocho obreros trabajan 12 días para hacer una obra y cobran 3600 €. ¿Cuánto ganarán seis obreros si hacen en 10 días el mismo trabajo?

N.º de obreros	(D)	Tiempo (días)	(D)	Dinero (€)
8	→	12	→	3600
6	→	10	→	x

$$\frac{8 \cdot 12}{6 \cdot 10} = \frac{3600}{x} \Rightarrow x = 2250 \text{ €}$$

79. Calcula el interés que producen 7000 € en 4 años al 5% de rédito anual.

$$I = c \cdot r \cdot t$$

$$I = 7000 \cdot 0,05 \cdot 4 = 1400 \text{ €}$$

80. Calcula el rédito al que depositar 35500 € durante 3 años para conseguir un interés de 5857,5 €

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow r = \frac{I}{c \cdot t}$$

$$r = \frac{5857,5}{35500 \cdot 3} = 0,055 \Rightarrow R = 5,5\%$$

81. Calcula cuántos meses hay que depositar 25000 € al 4% para conseguir 2000 € de interés.

$$I = \frac{c \cdot r \cdot t}{n} \Rightarrow t = \frac{I \cdot n}{c \cdot r}$$

$$t = \frac{2000 \cdot 12}{25000 \cdot 0,04} = 24 \text{ meses}$$

PARA PROFUNDIZAR

82. Se reparte una cantidad entre tres personas en partes directamente proporcionales a 3, 5 y 7. Si a la se-

gunda persona le corresponden 2200 €, calcula cuánto le corresponde a cada una y la cantidad total repartida.

A cada unidad le corresponde:
 $2200 : 5 = 440 \text{ €}$
 A la 1.ª le corresponde: $440 \cdot 3 = 1320 \text{ €}$
 A la 3.ª le corresponde: $440 \cdot 7 = 3080 \text{ €}$
 Total: $1320 + 2200 + 3080 = 6600 \text{ €}$

83. Un vendedor de motos gana un 30% sobre el precio de coste de una moto. Si la moto tiene un precio de coste de 15600 € y el vendedor hace un 10% de descuento y aumenta un 16% de IVA, ¿cuál es el precio final de la moto?

$$\text{Precio: } 15600 \cdot 1,3 \cdot 0,9 \cdot 1,16 = 21172,32 \text{ €}$$

84. ¿Qué porcentaje de descuento se ha aplicado a un producto que costaba 500 € y por el que se han pagado 325 €?

Se ha pagado: $325/500 = 0,65$
 Se ha descontado el 35%

85. Dos ruedas están engranadas en una máquina y tienen 12 y 45 dientes. Si la primera da 15 vueltas en 1/5 de minuto, ¿cuántas vueltas dará la segunda en una hora?

N.º de clientes	(I)	Tiempo (min)	(D)	N.º de vueltas
12	→	1/5	→	15
45	→	60	→	x

$$\frac{45 \cdot 1/5}{12 \cdot 60} = \frac{15}{x} \Rightarrow x = 1200 \text{ vueltas}$$

86. Calcula la amplitud de los ángulos de un triángulo sabiendo que dichos ángulos son directamente proporcionales a 2, 3 y 5

$$180^\circ : (2 + 3 + 5) = 18^\circ$$

$$x = 18^\circ \cdot 2 = 36^\circ$$

$$y = 18^\circ \cdot 3 = 54^\circ$$

$$z = 18^\circ \cdot 5 = 90^\circ$$

87. Al ir a pagar una factura en la que hacen un 15% de descuento y aplican un 16% de IVA, ¿es mejor que hagan primero el descuento y luego apliquen el IVA, al revés, o da lo mismo?

Total: Precio · 0,85 · 1,16 = Precio · 1,16 · 0,85
 Da lo mismo.

88. Un determinado producto aumenta su precio un 15% en un año. Al año siguiente aumenta un 16%. ¿Cuál ha sido el porcentaje de aumento en total?

$$1,15 \cdot 1,16 = 1,334. \text{ Ha aumentado un } 33,4\%$$

APLICA TUS COMPETENCIAS

89. Si el IPC del último año ha sido de un 3% y las pensiones de los jubilados deben subir de acuerdo con dicho índice, calcula cuánto cobrará con la subida un jubilado cuya pensión es de 480,81 €

$$480,81 \cdot 1,03 = 495,23 \text{ €}$$

COMPRUEBA LO QUE SABES

1. Define qué son magnitudes inversamente proporcionales y pon un ejemplo.

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si el producto de las cantidades correspondientes es constante.

Ejemplo:

A una velocidad de 10 km/h se tardan 6 horas en recorrer una distancia.

Vel (km/h)	10	20	30	40
Tiempo (h)	6	3	2	1,5

Las magnitudes *velocidad* y *tiempo* son inversamente proporcionales.

2. Calcula el cuarto o medio proporcional en las siguientes proporciones:

a) $\frac{x}{21} = \frac{30}{35}$ b) $\frac{4,2}{2,8} = \frac{4,5}{x}$

c) $\frac{4}{x} = \frac{x}{36}$ d) $\frac{x}{0,8} = \frac{3,2}{x}$

a) $x = 18$ b) $x = 3$ c) $x = \pm 12$ d) $x = \pm 1,6$

3. Se han comprado 250 g de queso por 3,2 €. ¿Cuánto pagaremos por 450 gramos?

Peso (g)	(D)	Dinero (€)
250	→	3,2
450	→	x

$\frac{250}{450} = \frac{3,2}{x} \Rightarrow x = 5,76 \text{ €}$

4. Cuatro amigos se reparten el alquiler de un apartamento de verano. Cada uno paga 375 €. Si se uniesen dos amigos más, ¿cuánto pagaría cada uno?

N.º de amigos	(I)	Dinero (€)
4	→	375
6	→	x

$\frac{4}{6} = \frac{375}{x} \Rightarrow x = 250 \text{ €}$

5. En una tienda compramos un televisor con una rebaja del 20% y nos cobran el 16% de IVA. Si pagamos 232 € por él, ¿cuál era su precio inicial?

Precio inicial: $232 : (0,8 \cdot 1,16) = 250 \text{ €}$

6. Diez obreros asfaltan 80 km en 24 días. ¿Cuántos obreros serán necesarios para asfaltar 220 km en 30 días?

Longitud (km)	Tiempo (días)	N.º de obreros
80	→	24
220	→	30
		→
		10
		x

$\frac{80}{220} \cdot \frac{30}{24} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = 22 \text{ obreros}$

7. ¿A qué rédito se han depositado 4200 € durante 14 meses si se ha obtenido un interés de 196 €?

$$I = \frac{c \cdot r \cdot t}{n} \Rightarrow r = \frac{I \cdot n}{c \cdot t}$$

$$r = \frac{196 \cdot 12}{4200 \cdot 14} = 0,04 \Rightarrow R = 4\%$$

8. Los tres primeros clasificados de una competición deben repartirse 17930 € en partes inversamente proporcionales al puesto en el que han quedado. ¿Cuánto percibe cada uno?

m.c.m.(1, 2, 3) = 6

$$1 = \frac{6}{6}; \frac{1}{2} = \frac{3}{6}; \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

Se reparte de forma directamente proporcional a 6, 3 y 2, respectivamente.

$17930 : (6 + 3 + 2) = 1630$

$x = 1630 \cdot 6 = 9780 \text{ €}$

$y = 1630 \cdot 3 = 4890 \text{ €}$

$z = 1630 \cdot 2 = 3260 \text{ €}$

WINDOWS/LINUX

PASO A PASO

90. Calcula el cuarto proporcional:

$$\frac{6,25}{23,4} = \frac{7,5}{x}$$

Resuelto en el libro del alumnado.

91. Si 7 kg de manzanas cuestan 14,7 €, ¿cuánto costarán 12 kg?

Resuelto en el libro del alumnado.

92. Un ganadero dispone de forraje para alimentar a 15 vacas durante 8 días. Si compra 5 vacas más, ¿cuántos días podrá alimentar al ganado con el mismo forraje?

Resuelto en el libro del alumnado.

93. Hemos pagado por un abrigo 473,28 € y nos han aplicado un 15% de descuento y un 16% de IVA. ¿Cuánto costaba el abrigo inicialmente?

Resuelto en el libro del alumnado.

94. Dos obreros canalizan 100 m de tubería para agua durante 10 días. ¿Cuántos días tardarán en canalizar 350 m de tubería 5 obreros?

Resuelto en el libro del alumnado.

PRACTICA

95. Calcula el cuarto proporcional en las siguientes proporciones:

a) $\frac{x}{32} = \frac{45}{72}$ b) $\frac{4}{5} = \frac{1,2}{x}$

a) $x = 20$ b) $x = 1,5$

96. Calcula el medio proporcional en las siguientes proporciones continuas:

a) $\frac{9}{x} = \frac{x}{16}$ b) $\frac{x}{0,6} = \frac{2,4}{x}$

a) $x = \pm 12$ b) $x = \pm 1,2$

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris:

97. Una tubería de 15 m de longitud pesa 210 kg. ¿Cuál será la longitud de una tubería que pesa 308 kg si es del mismo material y de la misma sección?

Peso (kg)	(D)	Longitud (m)
210	—————→	15 } x }
308	—————→	

$$\frac{210}{308} = \frac{15}{x} \Rightarrow x = 22 \text{ m}$$

98. Cuatro amigos se reparten el alquiler de un apartamento de verano. Cada uno paga 375 €. Si se uniesen dos amigos más, ¿cuánto pagaría cada uno?

N.º amigos	(I)	Dinero (€)
4	—————→	375 } x }
6	—————→	

$$\frac{6}{4} = \frac{375}{x} \Rightarrow x = 250 \text{ €}$$

99. Una familia de 5 miembros puede mantenerse durante 8 meses con 5000 €. ¿Cuántas personas podrían mantenerse durante 15 meses con 30000 €?

Dinero (€)	Tiempo (meses)	N.º personas
5 000	—————→	8 } 15 } 5 } x }
30 000	—————→	

$$\frac{5\,000}{30\,000} \cdot \frac{15}{8} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 16 \text{ personas}$$

100. Calcula el interés producido por un capital de 9000 € al 5,5% en 3 años.

$$I = c \cdot r \cdot t$$

$$I = 9\,000 \cdot 0,055 \cdot 3 = 1\,485 \text{ €}$$

101. ¿Qué capital se debe depositar al 5% para que después de 2 años produzca 400 €?

$$I = c \cdot r \cdot t \Rightarrow c = \frac{I}{r \cdot t}$$

$$c = \frac{400}{0,05 \cdot 2} = 4\,000 \text{ €}$$

102. En la factura de un taller aplican un 16% de IVA sobre un importe de 168 €. ¿Cuánto se paga en total?

$$\text{Total de la factura: } 168 \cdot 1,16 = 194,88 \text{ €}$$

103. En una factura de 350 € nos aplican un 20% de descuento y un 16% de IVA. Calcula el importe total de la factura.

$$\text{Total de la factura: } 350 \cdot 0,8 \cdot 1,16 = 324,8 \text{ €}$$

104. En una tienda compramos un televisor con una rebaja del 20% y nos cobran el 16% de IVA. Si pagamos 232 € por él, ¿cuál era su precio inicial?

$$\text{Precio inicial: } 232 : (0,8 \cdot 1,16) = 250 \text{ €}$$

105. En una disolución de 120 mL hay 14,4 mL de agua y el resto de alcohol. ¿Qué porcentaje de alcohol hay en la disolución?

$$(120 - 14,4)/120 = 0,88 \Rightarrow 88\% \text{ de alcohol.}$$

106. En una compra a plazos de 4 570,5 € suben el precio un 15,25%. ¿Cuánto se pagará en total?

$$\text{Total: } 4\,570,5 \cdot 1,1525 = 5\,267,5 \text{ €}$$

107. En una factura con un 16% de IVA, la cantidad inicial es 850 €. Si han hecho un descuento y la cantidad final a abonar es 788,8 €, ¿qué porcentaje de descuento han hecho?

El porcentaje que se paga es:

$$850 \cdot x \cdot 1,16 = 788,8 \Rightarrow x = 0,8 = 80\%$$

Han descontado el 20%

Evaluación de diagnóstico

BLOQUE I: ARITMÉTICA

Elige la respuesta correcta:

1. Redondea a dos decimales y calcula:

$$(12,447 - 4,253) : 2,499$$

- a) 3,29
b) 3,28
c) 3,27
d) 3,20

b) 3,28

2. Calcula y expresa el resultado de la forma más sencilla posible:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$$

- a) 1 b) 2 c) 1/4 d) 1/2

c) 1/4

3. Pedro tiene dos números. Uno de ellos es el 630 y del otro solo sabemos que es una potencia de 2. ¿Cuál es el máximo común divisor de esos dos números?

- a) 1
b) 10
c) 2
d) No se puede determinar. Depende de la potencia de 2.

c) 2

4. Calcula y expresa el resultado de la forma más sencilla posible:

$$8 - 3 \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$$

- a) 6
b) 7/2
c) 10
d) 10/3

a) 6

5. Calcula y expresa de la forma más sencilla

$$\sqrt{3^2 + 16}$$

- a) ± 7 b) 19 c) $\sqrt{22}$ d) ± 5

d) ± 5

6. Según una encuesta reciente, de cada 15 españoles 9 no han leído el
- Quijote*
- . ¿Qué porcentaje de españoles sí lo ha leído?

- a) 0,4%
b) 4%
c) 40%
d) No se puede determinar. Depende del número de habitantes total.

c) 40%

7. Con 48 L de gasolina el marcador de un coche señala
- $\frac{3}{4}$
- de depósito. ¿Cuál es la capacidad total del depósito del coche?

- a) 36 L b) 64 L c) 100 L d) 112 L

b) 64 L

8. Calcula el valor del término que ocupa el lugar 100 en una progresión aritmética cuyo primer término vale 2 y su diferencia, 5

- a) 497 b) 500 c) 502 d) 505

a) 497

9. Para hacer una tarta de 750 gramos, Pedro ha utilizado 300 gramos de harina. Ahora quiere hacer otra tarta que pese 1 kilogramo. ¿Cuántos gramos de harina necesitará?

- a) 225 g

- b) 500 g

- c) 450 g

- d) 400 g

d) 400 g

10. Sabiendo que el séptimo término de una progresión geométrica es 1 y la razón
- $\frac{1}{2}$
- , calcula el primer término.

- a) 1/64 b) 64 c) 128 d) 1/128

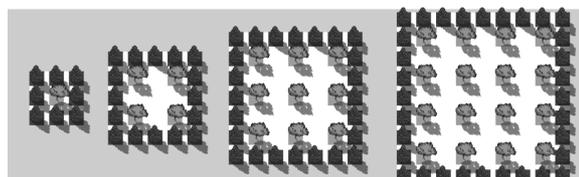
b) 64

11. La estación espacial Mir permaneció en órbita 15 años y durante este tiempo dio alrededor de 86 500 vueltas a la Tierra. La permanencia más larga de un astronauta en la Mir fue de 680 días.

La Mir daba vueltas alrededor de la Tierra a una altura aproximada de 400 kilómetros. El diámetro de la Tierra mide aproximadamente 12 700 km. Calcula aproximadamente la distancia total recorrida por la Mir durante sus 86 500 vueltas mientras estuvo en órbita. Expresa el resultado en notación científica.

El diámetro de la órbita es: $12\,700 + 800 = 13\,500$ kmLa longitud de la órbita es: $L = 13\,500 \cdot \pi = 42\,411,5$ kmLongitud total: $86\,500 \cdot 42\,411,5 = 3\,668\,594\,750$ km = $3\,669\,000\,000$ km = $3,669 \cdot 10^9$ km

12. Un agricultor planta manzanos en un terreno cuadrado. Con objeto de proteger los manzanos del viento planta coníferas alrededor de la totalidad del huerto. Aquí ves un esquema de esta situación donde se puede apreciar la colocación de los manzanos y de las coníferas para cualquier número (
- n
-) de filas de manzanos:



Pregunta 1.

Completa la tabla:

n	Número de manzanos	Número de coníferas
1	1	8
2		
3		
4		
5		

Pregunta 2.

Escribe el término general que nos da el número de manzanos y el de coníferas en función de n

Pregunta 3.

El agricultor ha decidido plantar 20 filas de manzanos. ¿Cuántos manzanos plantará? ¿Cuántas coníferas necesitará?

1.

n	Número de manzanos	Número de coníferas
1	1	8
2	4	16
3	9	24
4	16	32
5	25	40

2. N.º de manzanos = n^2 N.º de coníferas = $8n$

3. N.º de manzanos = 400 N.º de coníferas = 160

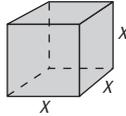
SOLUCIONARIO BLOQUE II.
ÁLGEBRA

5. Operaciones con polinomios

1. POLINOMIOS. SUMA Y RESTA

PIENSA Y CALCULA

Dado el cubo de la figura, calcula en función de x :



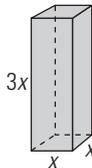
- a) El área. b) El volumen.
 a) $A(x) = 6x^2$ b) $V(x) = x^3$

CARNÉ CALCULISTA

Calcula con dos decimales: $758,49 : 2,4$
 $C = 316,03$; $R = 0,018$

APLICA LA TEORÍA

1. Dado el prisma cuadrangular del dibujo, calcula en función de x :



- a) El área. b) El volumen.
 a) $A(x) = 2x^2 + 4 \cdot 3x \cdot x = 14x^2$ b) $V(x) = 3x^3$

2. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son monomios? Calcula el grado de estos.

- a) $5x^3y$ b) $3x^{-2}y^3$ c) $7x^2y^5 + 3xy^2$ d) $4a$

Son monomios: a) y d).
 El grado de a) es 4
 El grado de d) es 1

3. Ordena de forma decreciente, según los grados, los siguientes polinomios y calcula el grado, el coeficiente principal y el término independiente:

- a) $7x^2 - 5x^3 + 4$ b) $-9x^2 - 6x^5 - 7 + 4x^6$
 c) $8x^2 - 5x + 4x^5$ d) $-7x^2 - x^8 - 7x + 9 - 4x^6$

- a) $-5x^3 + 7x^2 + 4$
 Grado: 3; coeficiente principal: -5
 Término independiente: 4
 b) $4x^6 - 6x^5 - 9x^2 - 7$
 Grado: 6; coeficiente principal: 4
 Término independiente: -7
 c) $4x^5 + 8x^2 - 5x$
 Grado: 5; coeficiente principal: 4
 Término independiente: 0
 d) $-x^8 - 4x^6 - 7x^2 - 7x + 9$
 Grado: 8; coeficiente principal: -1
 Término independiente: 9

4. Halla el valor de a , b y c para que los siguientes polinomios sean iguales:

$P(x) = ax^4 - 8x^3 + 4x - b$
 $Q(x) = 5x^4 - 8x^3 - cx^2 + 4x + 6$
 $a = 5, b = -6, c = 0$

5. Suma los siguientes polinomios:

$P(x) = 7x^4 - 6x^3 + 5x - 3$
 $Q(x) = x^4 + 8x^3 - x^2 + 4x + 6$
 $P(x) + Q(x) = 8x^4 + 2x^3 - x^2 + 9x + 3$

6. Halla el opuesto de los siguientes polinomios:

$P(x) = 5x^5 - 7x^3 + 4x - 1$
 $Q(x) = -x^4 + 6x^3 - x^2 + 5x + 1$
 $P(x) = -5x^5 + 7x^3 - 4x + 1$
 $Q(x) = x^4 - 6x^3 + x^2 - 5x - 1$

7. Calcula $P(x) - Q(x)$:

$P(x) = 5x^4 + x^3 - 2x^2 - 5$
 $Q(x) = 7x^4 - 5x^2 + 3x + 2$
 $P(x) - Q(x) = -2x^4 + x^3 + 3x^2 - 3x - 7$

8. Los ingresos y los gastos de una empresa en millones de euros, en función del número de años que lleva funcionando, vienen dados por:

$I(t) = t^2 - 3t + 5$ $G(t) = t^2 - 4t + 9$

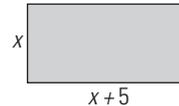
Halla la expresión $B(t)$ de los beneficios.

$B(t) = I(t) - G(t) = t - 4$

2. MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

PIENSA Y CALCULA

Calcula, en función de x , el área del rectángulo de la figura:



$A(x) = (x + 5)x = x^2 + 5x$

CARNÉ CALCULISTA

Calcula: $\frac{7}{6} - \frac{5}{2} \left(\frac{4}{3} - \frac{7}{10} \right) = -\frac{5}{12}$

APLICA LA TEORÍA

9. Multiplica los polinomios:

$P(x) = 2x^3 - 3x + 5$
 $Q(x) = 3x^2 + x - 4$
 $6x^5 + 2x^4 - 17x^3 + 12x^2 + 17x - 20$

10. Multiplica los polinomios:

$P(x) = x^4 - 3x^2 + x - 5$
 $Q(x) = 2x^3 + x^2 - 4$
 $2x^7 + x^6 - 6x^5 - 5x^4 - 9x^3 + 7x^2 - 4x + 20$

11. Multiplica los polinomios:

$P(x) = 3x^5 - x^3 - 5x + 1$
 $Q(x) = 2x^4 + 4x^2 - 3$
 $6x^9 + 10x^7 - 23x^5 + 2x^4 - 17x^3 + 4x^2 + 15x - 3$

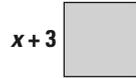
12. Calcula mentalmente:

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| a) $(x + 2)^0$ | b) $(x - 3)^1$ | c) $(x - 7)^1$ |
| d) $(2x + 6)^0$ | e) $(x + 5)^2$ | f) $(x - 6)^2$ |
| g) $(x + 9)^2$ | h) $(x - 4)^2$ | i) $(x + 3)(x - 3)$ |
| a) 1 | b) $x - 3$ | c) $x - 7$ |
| d) 1 | e) $x^2 + 10x + 25$ | f) $x^2 - 12x + 36$ |
| g) $x^2 + 18x + 81$ | h) $x^2 - 8x + 16$ | i) $x^2 - 9$ |

13. Desarrolla y simplifica:

- a) $(2x + 1/2)^2$ b) $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$
 c) $(6x - 2/3)^2$ d) $(5x + 3/4)(5x - 3/4)$
 a) $4x^2 + 2x + 1/4$ b) $x^2 - 5$
 c) $36x^2 - 8x + 4/9$ d) $25x^2 - 9/16$

14. Halla el polinomio que da el área del cuadrado de la figura:



$A(x) = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

15. Desarrolla los siguientes productos:

- a) $5x^2(2x^3 - 3x)$ b) $-2x^3(7x^4 - 4x^2)$
 c) $-3x(-8x^5 - 5x^2)$ d) $6x^4(-x^5 + 2x)$
 a) $10x^5 - 15x^3$ b) $-14x^7 + 8x^5$
 c) $24x^6 + 15x^3$ d) $-6x^9 + 12x^5$

16. Opera y simplifica

- a) $(x + 3)^2 - (x - 3)^2$ b) $(x + 4)^2 - (x + 4)(x - 4)$
 a) $12x$ b) $8x + 32$

17. Factoriza mentalmente:

- a) $2x^2 + 6x$ b) $x^2 - 6x + 9$
 c) $x^2 - 25$ d) $x^2 + 8x + 16$
 a) $2x(x + 3)$ b) $(x - 3)^2$
 c) $(x + 5)(x - 5)$ d) $(x + 4)^2$

18. Factoriza:

- a) $12x^4 + 8x^3$ b) $5x^3 + 20x^2 + 20x$
 c) $x^2 - 3$ d) $9x^2 - 30x + 25$
 a) $4x^3(3x + 2)$ b) $5x(x + 2)^2$
 c) $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ d) $(3x - 5)^2$

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

PIENSA Y CALCULA

Realiza mentalmente las siguientes divisiones:

- a) $(x^3 + 6x^2 - 7x) : x$ b) $(x^2 + 6x + 9) : (x + 3)$
 c) $(x^2 - 8x + 16) : (x - 4)$ d) $(x^2 - 25) : (x + 5)$
 a) $x^2 + 6x - 7$ b) $x + 3$
 c) $x - 4$ d) $x - 5$

CARNÉ CALCULISTA

Calcula con dos decimales: $8,57 : 40$

$C = 0,21; R = 0,17$

APLICA LA TEORÍA

19. Divide y haz la comprobación:

$P(x) = 2x^5 - 8x^4 + 12x^2 + 18$

entre $Q(x) = x^2 - 3x - 1$

$C(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x - 2$

$R(x) = -10x + 16$

Se comprueba que $C(x) \cdot Q(x) + R(x) = P(x)$

20. Divide por Ruffini:

$P(x) = 2x^3 - 13x + 8$

entre $Q(x) = x + 3$

$C(x) = 2x^2 - 6x + 5$

$R = -7$

21. Divide:

$P(x) = 6x^5 + 2x^4 - 17x^3 + 20x - 25$

entre

$Q(x) = 2x^3 - 3x + 5$

$C(x) = 3x^2 + x - 4$

$R(x) = -12x^2 + 3x - 5$

22. Divide por Ruffini:

$P(x) = x^4 - 6x^3 + 9x + 10$

entre

$Q(x) = x - 3$

$C(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 18$

$R = -44$

23. Divide:

$P(x) = 2x^7 + x^6 - 9x^5 - 5x^4 + 9x^2 + 8$

entre

$Q(x) = x^4 - 3x^2 + x - 5$

$C(x) = 2x^3 + x^2 - 3x - 4$

$R(x) = 5x^2 - 11x - 12$

24. Divide por Ruffini:

$P(x) = x^5 - 4x^3 + 7x + 12$

entre

$Q(x) = x + 1$

$C(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x + 4$

$R = 8$

25. Divide por Ruffini

$(3x^4 - 7x^2 - 8x - 1) : (x - 2)$

$C(x) = 3x^3 + 6x^2 + 5x + 2$

$R = 3$

26. Halla un polinomio tal que al dividirlo entre

$2x^3 - 5x + 1$

se obtenga de cociente:

$x^2 + 3x - 4$

y de resto:

$-7x^2 + x + 8$

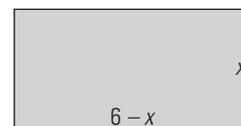
$(2x^3 - 5x + 1)(x^2 + 3x - 4) - 7x^2 + x + 8 =$

$= 2x^5 + 6x^4 - 13x^3 - 21x^2 + 24x + 4$

4. TEOREMA DEL RESTO Y DEL FACTOR

PIENSA Y CALCULA

Tenemos un rectángulo de 12 m de perímetro, luego la base más la altura medirán 6 m. Si la altura mide x metros, la base medirá $6 - x$ m. La fórmula del área será:



$A(x) = (6 - x)x \Rightarrow A(x) = 6x - x^2$

Completa en tu cuaderno la tabla de la derecha y halla cuándo el área es máxima.

x	1	2	3	4	5
$A(x) = 6x - x^2$					

x	1	2	3	4	5
$A(x) = 6x - x^2$	5	8	9	8	5

El área es máxima cuando $x = 3$ m

CARNÉ CALCULISTA

Calcula: $\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{7}{6} : \frac{5}{4} = -\frac{1}{10}$

APLICA LA TEORÍA

27. Calcula mentalmente el valor numérico del siguiente polinomio $P(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^2 - 8$ para los valores que se indican:

- a) Para $x = 0$ b) Para $x = 1$
 a) $P(0) = -8$ b) $P(1) = -4$

28. Calcula el valor numérico del siguiente polinomio para los valores que se indican:

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x - 2$$

- a) Para $x = 3$ b) Para $x = -3$
 a) $P(3) = 13$ b) $P(-3) = 145$

29. Halla, sin hacer la división, el resto de dividir el polinomio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ entre $x - 2$

Se aplica el teorema del resto:
 $R = P(2) = -11$

30. Halla, sin hacer la división, el resto de dividir el polinomio $P(x) = x^4 + 3x^3 - 5x - 7$ entre $x + 3$

Se aplica el teorema del resto:
 $R = P(-3) = 8$

31. Halla el valor de k para que el resto de la siguiente división sea 5:

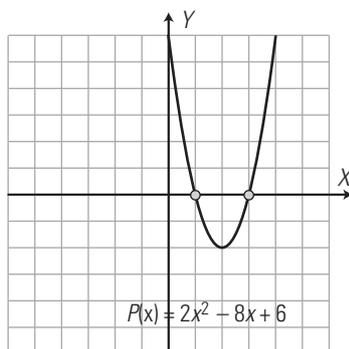
$$(x^3 + kx^2 - 4) : (x + 3)$$

Se aplica el teorema del resto:
 $P(-3) = 5 \Rightarrow 9k - 31 = 5 \Rightarrow k = 4$

32. ¿Cuál de los números, 3 o -3, es raíz del polinomio $P(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$?

Se aplica el teorema del factor:
 $R = P(3) = 0 \Rightarrow x = 3$ es raíz
 $R = P(-3) = 0 \Rightarrow x = -3$ es raíz

33. Observa la gráfica y calcula las raíces del polinomio $P(x) = 2x^2 - 8x + 6$



$x_1 = 1, x_2 = 3$

34. Comprueba, sin hacer la división, que el polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ es divisible entre $x + 1$

Se aplica el teorema del factor:
 $R = P(-1) = 0 \Rightarrow$ sí es divisible.

35. Halla el valor de k para que el polinomio:

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + kx + 10$$

sea divisible entre $x - 1$
 Se aplica el teorema del factor:
 $R = P(1) = 0 \Rightarrow 7 + k = 0 \Rightarrow k = -7$

36. ¿El polinomio $x^2 + 9$ tiene alguna raíz real? Razona la respuesta.

No, porque x^2 siempre es mayor o igual que cero y al sumarle 9, siempre es positivo; por tanto, nunca puede ser cero.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. POLINOMIOS. SUMA Y RESTA

37. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son monomios? Calcula el grado de estos.

- a) $5x^4 + x^3y$ b) $5x^2y^3$ c) $x^2y^5 - 4xy^2$ d) 7

Son monomios: b) y d).
 El grado del b) es 5
 El grado del d) es 0

38. Clasifica las siguientes expresiones algebraicas en monomios, binomios o trinomios.

- a) $x + y + z$ b) $-7x^5y^3$
 c) $x - y$ d) $3x^2 - 3$
 a) Trinomio b) Monomio
 c) Binomio d) Binomio

39. Calcula el grado, el coeficiente principal y el término independiente de los siguientes polinomios:

- a) $5x^4 - 2x^3 + 1$ b) $-4x^7 - 5x^4 - 7x^3 - 1$
 c) $5x^2 - 4x + 3$ d) $-6x^{10} - x^8 - 3x^6 + 8x - 7$

- a) Grado: 4; coeficiente principal: 5
 Término independiente: 1
 b) Grado: 7; coeficiente principal: -4
 Término independiente: -1
 c) Grado: 2; coeficiente principal: 5
 Término independiente: 3
 d) Grado: 10; coeficiente principal: -6
 Término independiente: -7

40. Suma los siguientes polinomios:

$$P(x) = 7x^5 - 5x^3 + 3x^2 - 1$$

$$Q(x) = -3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 3x + 1$$

$$7x^5 - 3x^4 - x^2 + 3x$$

41. Calcula $P(x) - Q(x)$:

$$P(x) = 4x^5 + 7x^3 - x - 2$$

$$Q(x) = 5x^4 - 3x^3 + 7x + 2$$

$$4x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 8x - 4$$

2. MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

42. Multiplica los polinomios:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 3$$

$$Q(x) = 2x^3 - 5x + 1$$

$$2x^6 - 4x^5 - 5x^4 + 17x^3 - 2x^2 - 15x + 3$$

43. Multiplica los polinomios:

$$P(x) = 2x^4 - 4x^3 - 5x + 1$$

$$Q(x) = x^3 - 2x + 7$$

$$2x^7 - 4x^6 - 4x^5 + 17x^4 - 27x^3 + 10x^2 - 37x + 7$$

44. Multiplica los polinomios:

$$P(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1$$

$$Q(x) = x^4 - 5x^2 + 2$$

$$x^9 - 7x^7 + 3x^6 + 12x^5 - 16x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 2$$

45. Desarrolla mentalmente:

a) $(x + 3)^2$

b) $(x + 1)(x - 1)$

c) $(x/2 - 2/3)^2$

d) $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

a) $x^2 + 6x + 9$

b) $x^2 - 1$

c) $x^2/4 - 2x/3 + 4/9$

d) $x^2 - 2$

46. Desarrolla los siguientes productos:

a) $4x(5x^4 - 6x)$

b) $-7x^2(5x^3 - 3x^2)$

c) $-3x^3(-6x^2 - 1)$

d) $5x^4(-x^2 + 5x)$

a) $20x^5 - 24x^2$

b) $-35x^5 + 21x^4$

c) $18x^5 + 3x^3$

d) $-5x^6 + 25x^5$

47. Opera y simplifica:

a) $(2x + 5)^2 - (2x + 5)(2x - 5)$

b) $(x - 1/3)^2 + (x + 1/3)$

a) $20x + 50$

b) $x^2 + 2/9$

48. Factoriza mentalmente:

a) $8x^3 + 12x^2$

b) $x^2 + 10x + 25$

c) $x^2 - 5$

d) $x^2 - 14x + 49$

a) $4x^2(2x + 3)$

b) $(x + 5)^2$

c) $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$

d) $(x - 7)^2$

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

49. Divide y haz la comprobación:

$$P(x) = 2x^5 - 6x^4 + 20x^2 - 38x + 12$$

entre $Q(x) = x^3 - 5x + 3$

$$C(x) = 2x^2 - 6x + 10$$

$$R(x) = -16x^2 + 30x - 18$$

Hay que hacer la comprobación:

$$Q(x) \cdot C(x) + R(x) \text{ tiene que dar } P(x)$$

50. Divide y haz la comprobación:

$$P(x) = 4x^6 - 12x^4 + 8x^3 + 9$$

entre $Q(x) = 2x^3 - 5x + 1$

$$C(x) = 2x^3 - x + 3$$

$$R(x) = -5x^2 + 16x + 6$$

Hay que hacer la comprobación:

$$Q(x) \cdot C(x) + R(x) \text{ tiene que dar } P(x)$$

51. Divide $P(x) = 6x^6 - 13x^5 - 20x^3 + 50x^2 - 4$

entre $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

$$C(x) = 3x^3 - 2x^2 - 3x - 16$$

$$R(x) = 4x^2 + 3x + 12$$

52. Divide por Ruffini:

$$P(x) = x^4 - 6x^2 + 4x + 5$$

entre $Q(x) = x + 2$

$$C(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 8$$

$$R = -11$$

53. Divide por Ruffini:

$$P(x) = x^5 - 4x^3 + 5x^2 + 3$$

entre $Q(x) = x - 1$

$$C(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

$$R = 5$$

54. Divide por Ruffini:

$$P(x) = x^6 - 4x^4 + 6x^3 + 1$$

entre $Q(x) = x - 2$

$$C(x) = x^5 + 2x^4 + 6x^2 + 12x + 24$$

$$R = 49$$

4. TEOREMA DEL RESTO Y DEL FACTOR

55. Calcula mentalmente el valor numérico del polinomio $P(x) = 4x^7 - 5x^3 + 9x^2 - 6$ para los valores que se indican:

a) Para $x = 0$

b) Para $x = 1$

a) $P(0) = -6$

b) $P(1) = 2$

56. Calcula el valor numérico del siguiente polinomio para los valores que se indican:

$$P(x) = x^5 - 2x^3 + 4x - 1$$

a) Para $x = 2$

b) Para $x = -1$

a) $P(2) = 23$

b) $P(-1) = -4$

57. ¿Cuál de los números, 2 o -2, es raíz del polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$?

$$R = P(2) = 12 \Rightarrow \text{No es raíz.}$$

$$R = P(-2) = 0 \Rightarrow \text{Sí es raíz.}$$

58. Halla el valor de k para que el resto de la siguiente división sea -11

$$P(x) = x^3 + kx^2 + 7 \text{ entre } x - 3$$

Se aplica el teorema del resto:

$$P(3) = -11 \Rightarrow k = -5$$

59. Halla, sin hacer la división, el resto de dividir

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 7x - 3 \text{ entre } x + 2$$

Se aplica el teorema del resto:

$$R = P(-2) = 15$$

60. Comprueba, sin hacer la división, que el polinomio $P(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9$ es divisible entre $x - 3$

Se aplica el teorema del factor:

$$R = P(3) = 0 \Rightarrow \text{Sí es divisible.}$$

61. Halla el valor de k para que el resto de la siguiente división sea 7:

$$(x^4 + kx^2 - 5x + 6) : (x + 1)$$

Se aplica el teorema del resto:

$$P(-1) = 7 \Rightarrow k + 12 = 7 \Rightarrow k = -5$$

PARA AMPLIAR

62. Halla el valor de a , b y c para que los siguientes polinomios sean iguales:

$$P(x) = 6x^5 - bx^3 + 3x - 4$$

$$Q(x) = ax^5 + 3x - c$$

$$a = 6, b = 0, c = 4$$

63. Calcula mentalmente:

- | | |
|-------------------|------------------|
| a) $(2x/3 + 5)^0$ | b) $(3x - 25)^1$ |
| c) $(7x - 3/5)^1$ | d) $(5x + 13)^0$ |
| a) 1 | b) $3x - 25$ |
| b) $7x - 3/5$ | d) 1 |

64. Factoriza:

- | | |
|-----------------------|--------------------------|
| a) $24x^3 - 18x^2$ | b) $2x^3 + 12x^2 + 18x$ |
| c) $9x^2 - 4$ | d) $5x^4 - 10x^3 + 5x^2$ |
| a) $6x^2(4x - 3)$ | b) $2x(x + 3)^2$ |
| c) $(3x + 2)(3x - 2)$ | d) $5x^2(x - 1)^2$ |

65. Opera y simplifica:

- | | |
|--|------------|
| a) $(2x + 3/2)(2x - 3/2)^2 - (2x - 3/2)^2$ | |
| b) $(x/2 - 2/3)^2 - (x/2 + 2/3)^2$ | |
| a) $3x - 9/2$ | b) $-4x/3$ |

66. Halla el valor de k para que el resto de la siguiente división sea 13:

$$(x^5 + kx^3 - 7x^2 + 4) : (x - 1)$$

Se aplica el teorema del resto:

$$P(1) = 13 \Rightarrow k - 2 = 13 \Rightarrow k = 15$$

67. Halla el valor de k para que el polinomio:

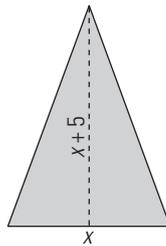
$$P(x) = x^3 + 5x^2 + kx - 8$$

sea divisible entre $x + 2$

Se aplica el teorema del factor:

$$P(-2) = 0 \Rightarrow 4 - 2k = 0 \Rightarrow k = 2$$

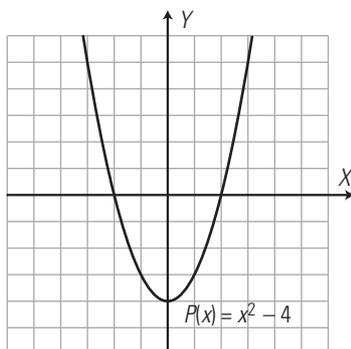
68. Halla el polinomio que da el área del siguiente triángulo:



$$A(x) = \frac{x(x + 5)}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{5x}{2}$$

69. Observa la gráfica y calcula las raíces del polinomio

$$P(x) = x^2 - 4$$



$$x_1 = 2, x_2 = -2$$

PROBLEMAS

70. Escribe en forma de polinomio, en una variable, cada uno de los enunciados siguientes:

- a) El cuadrado de un número, menos dicho número, más 5
- b) El cubo de un número, más el doble del cuadrado del número, menos el triple del número, más 4
- c) El área de un cuadrado de lado x
- d) El área de un rombo en el que una diagonal es el doble de la otra.

- | | |
|-------------------------|---------------------------------|
| a) $P(x) = x^2 - x + 5$ | b) $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$ |
| c) $A(x) = x^2$ | d) $A(x) = x \cdot 2x/2 = x^2$ |

71. ¿Qué polinomio tenemos que sumar a

$$P(x) = 5x^3 - 9x + 8$$

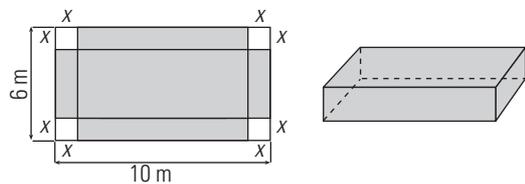
para obtener el polinomio

$$Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x + 1?$$

$$Q(x) - P(x) = -3x^3 - 4x^2 + 14x - 7$$

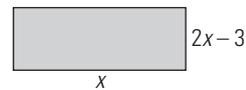
72. Dada una caja sin tapa y su desarrollo, calcula en función de x :

- a) El área.
- b) El volumen.



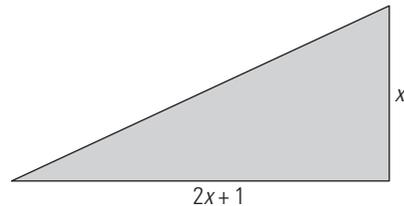
- a) $A(x) = (10 - 2x)(6 - 2x) + 2x(10 - 2x) + 2x(6 - 2x) = 60 - 4x^2$
 $A(x) = 60 - 4x^2$
- b) $V(x) = (10 - 2x)(6 - 2x)x = 4x^3 - 32x^2 + 60x$

73. Halla el polinomio que da el área del siguiente rectángulo:



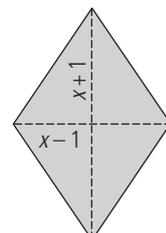
$$A(x) = x(2x - 3) = 2x^2 - 3x$$

74. Halla el polinomio que da el área del siguiente triángulo rectángulo:



$$A(x) = (2x + 1)x/2 = x^2 + x/2$$

75. Halla el polinomio que da el área del siguiente rombo:



$$A(x) = (x + 1)(x - 1)/2 = x^2/2 - 1/2$$

76. Halla un polinomio tal que al dividirlo entre $x^3 - 3x + 1$ se obtenga de cociente $2x^2 + 5x - 3$ y de resto $5x^2 - 3x + 9$

$$(x^3 - 3x + 1)(2x^2 + 5x - 3) + 5x^2 - 3x + 9 = 2x^5 + 5x^4 - 9x^3 - 8x^2 + 11x + 6$$

77. Halla el valor de k para que el resto de la siguiente división sea 5:

$$(x^3 + kx^2 - 4) : (x - 2)$$

Se aplica el teorema del resto:

$$P(2) = 5 \Rightarrow 4k + 4 = 5 \Rightarrow k = 1/4$$

78. Halla el valor de k para que el polinomio

$$P(x) = x^4 - x^3 - 19x^2 + kx + 30$$

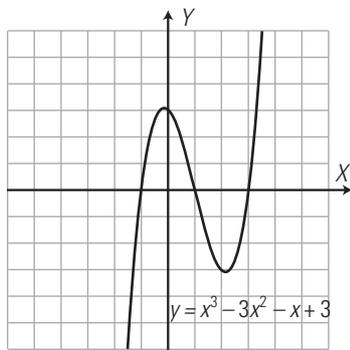
sea divisible entre $x + 3$

Se aplica el teorema del factor:

$$P(-3) = 0 \Rightarrow -3k - 33 = 0 \Rightarrow k = -11$$

79. Observa la gráfica y calcula las raíces del polinomio

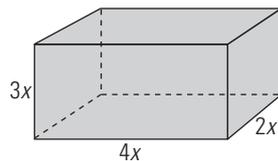
$$P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$$



$$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3$$

PARA PROFUNDIZAR

80. Dado el siguiente paralelepípedo:

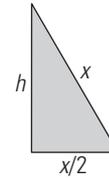
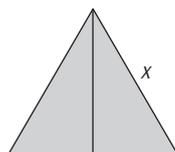


calcula en función de x el área y el volumen.

$$A(x) = 2 \cdot 4x \cdot 3x + 2 \cdot 4x \cdot 2x + 2 \cdot 3x \cdot 2x = 52x^2$$

$$V(x) = 4x \cdot 3x \cdot 2x = 24x^3$$

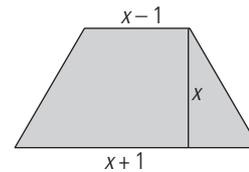
81. Halla el monomio que da el área de un triángulo equilátero en el que el lado mide x



$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

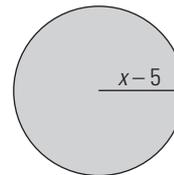
$$A(x) = \frac{1}{2} x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} x = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$$

82. Halla el polinomio que da el área del siguiente trapecio:



$$A(x) = \frac{x+1+x-1}{2} \cdot x = x^2$$

83. Halla el polinomio que da el área del siguiente círculo:



$$A(x) = \pi(x-5)^2 = \pi x^2 - 10\pi x + 25\pi$$

84. Halla el valor de k para que el resto de la siguiente división sea 9:

$$(x^4 - x^3 - 13x^2 - x + k) : (x - 4)$$

Se aplica el teorema del factor:

$$P(4) = 9 \Rightarrow k - 20 = 9 \Rightarrow k = 29$$

85. Halla el valor de k para que el polinomio

$$P(x) = x^4 + 8x^3 + kx^2 - 8x - 15$$

sea divisible entre $x + 5$

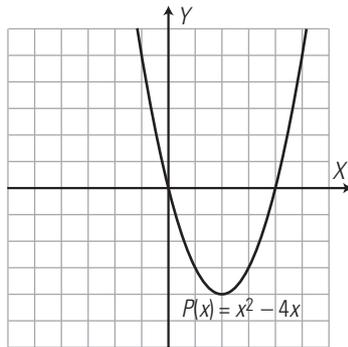
Se aplica el teorema del resto:

$$P(-5) = 0 \Rightarrow 25k - 350 = 0 \Rightarrow k = 14$$

86. ¿El polinomio $x^2 + 25$ tiene alguna raíz real? Razona la respuesta.

x^2 es siempre positivo o cero y al sumarle 25 es positivo. Por tanto, nunca se puede hacer cero. No tiene raíces reales.

87. Observa la gráfica y calcula las raíces del polinomio $P(x) = x^2 - 4x$



$x_1 = 0, x_2 = 4$

APLICA TUS COMPETENCIAS

88. Calcula el polinomio que define un movimiento uniformemente acelerado en el que:

$a = 6 \text{ m/s}^2, v_0 = 8 \text{ m/s}$ y $e_0 = 3 \text{ m}$

$e(t) = 3t^2 + 8t + 3$

89. Calcula el espacio que lleva recorrido cuando hayan pasado 5 s

$e(5) = 118 \text{ m}$

90. Calcula el espacio que recorre entre el segundo 10 y el segundo 20

$e(20) - e(10) = 1363 - 383 = 980 \text{ m}$

COMPRUEBA LO QUE SABES

1. Enuncia el teorema del resto y pon un ejemplo.

El resto que se obtiene al dividir el polinomio $P(x)$ entre el binomio $x - a$ es el valor numérico del polinomio para $x = a \Rightarrow R = P(a)$

Ejemplo:

Halla, sin hacer la división, el resto de dividir

$P(x) = x^3 - 7x + 15$

entre $x + 3$

$R = P(-3) = (-3)^3 - 7 \cdot (-3) + 15 = -27 + 21 + 15 = 9$

2. Ordena el siguiente polinomio de forma decreciente según los grados y calcula el grado, el coeficiente principal y el término independiente:

$5x^3 - 6x^7 - 5x + 9$

$-6x^7 + 5x^3 - 5x + 9$

Grado: 7

Coficiente principal: -6

Término independiente: 9

3. Desarrolla mentalmente los apartados a) y b) y factoriza los apartados c) y d):

a) $(2x - 5)^2$

b) $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

c) $3x^3 + 12x^2 + 12x$

d) $x^2 - 5$

a) $4x^2 - 20x + 25$

b) $x^2 - 3$

c) $3x(x + 2)^2$

d) $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$

4. Multiplica los polinomios:

$P(x) = 5x^3 - x^2 + 3$ $Q(x) = 3x^2 - 2x + 4$

$15x^5 - 13x^4 + 22x^3 + 5x^2 - 6x + 12$

5. Divide $P(x) = 8x^5 - 16x^4 + 21x^2 - 19x + 10$ entre $Q(x) = 2x^2 - 5x + 4$. Haz la comprobación.

$C(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3x - 1$

$R(x) = -12x + 14$

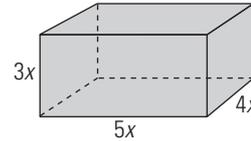
Se comprueba que $Q(x) \cdot C(x) + R(x) = P(x)$

6. Divide por Ruffini $P(x) = x^4 - 10x^2 + 12$ entre $Q(x) = x + 3$

$C(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

$R = 3$

7. Dado el siguiente paralelepípedo:



Calcula en función de x :

a) El área.

b) El volumen.

a) $A(x) = 2 \cdot 5x \cdot 4x + 2 \cdot 5x \cdot 3x + 2 \cdot 4x \cdot 3x = 94x^2$

b) $V(x) = 3x \cdot 4x \cdot 5x = 60x^3$

8. Halla el valor de k para que el resto de la siguiente división sea 5: $(x^3 + kx - 6) : (x - 2)$

Se aplica el teorema del resto y se tiene que verificar que:

$P(2) = 5$

$2^3 + 2k - 6 = 5$

$8 + 2k - 6 = 5$

$2k = 3$

$k = 3/2$

WINDOWS/LINUX WRIS

PASO A PASO

91. Dados los polinomios:

$P(x) = 5x^3 - x^2 + 3$ y $Q(x) = 3x^2 - 2x + 4$

Calcula:

$P(x) + Q(x), P(x) - Q(x), P(x) \cdot Q(x)$

Resuelto en el libro del alumnado.

92. Desarrolla $(5x + 3/7)^2$

Resuelto en el libro del alumnado.

93. Factoriza $x^3 + 10x^2 + 25x$

Resuelto en el libro del alumnado.

94. Divide $D(x) = 6x^5 - 30x^2 - 48$ entre $d(x) = 3x^3 + 6$

Resuelto en el libro del alumnado.

95. Calcula el valor numérico del polinomio

$P(x) = x^3 - 5x^2 + 17$

para $x = 2, x = 0, x = 1$

Resuelto en el libro del alumnado.

96. Representa la parábola $y = x^2 - 2x - 3$ y, observando la gráfica calcula las raíces del polinomio $P(x) = x^2 - 2x - 3$

Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de Wiris:

97. Halla el valor de k para que el resto de la división $(x^3 + kx - 6) : (x - 2)$ sea 5

Resuelto en el libro del alumnado.

PRACTICA

98. Desarrolla:

a) $4x^3(2x + 3)^2$

b) $(x + 3)(x - 3)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

a) $16x^5 + 48x^4 + 36x^3$

b) $x^4 - 12x^2 + 27$

99. Factoriza:

a) $x^3 - 9x$

b) $x^2 - 5$

a) $x(x + 3)(x - 3)$

b) $(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$

100. Dados los polinomios:

$P(x) = 2x^3 - 3x + 5$

$Q(x) = 3x^2 + x - 4$

Calcula:

$P(x) + Q(x)$; $P(x) - Q(x)$; $P(x) \cdot Q(x)$

$P(x) + Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

$P(x) - Q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 9$

$P(x) \cdot Q(x) = 6x^5 + 2x^4 - 17x^3 + 12x^2 + 17x - 20$

101. Divide y haz la comprobación:

$2x^5 - 8x^4 + 12x^2 + 18$ entre $x^2 - 3x - 1$

$C(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x - 2$

$R(x) = -10x + 16$

Se comprueba que $C(x) \cdot Q(x) + R(x) = P(x)$

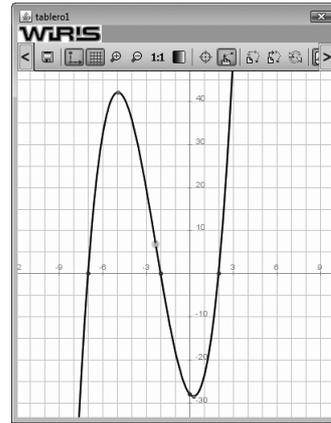
102. Divide $6x^3 - 13x + 5$ entre $x + 2$

$C(x) = 6x^2 - 12x + 11$

$R = -17$

103. Halla gráficamente las raíces del polinomio:

$P(x) = x^3 + 7x^2 - 4x - 28$



$x_1 = -7, x_2 = -2, x_3 = 2$

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris:

104. Halla, sin hacer la división, el resto de dividir

$x^3 - 6x^2 + 5$

entre $x - 2$

Se aplica el teorema del resto:

$R = P(2) = -11$

105. Halla un polinomio sabiendo que al dividirlo entre $x^2 - 3x + 5$ da de cociente $2x^2 + 7x - 4$, y de resto, $8x - 9$.

Se aplica la prueba de la división:

$2x^4 + x^3 - 15x^2 + 55x - 29$

106. Comprueba, sin hacer la división, que el polinomio $P(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9$ es divisible entre $x - 3$

Se aplica el teorema del factor:

$R = P(3) = 0 \Rightarrow$ Sí es divisible.

107. Halla el valor de k para que el resto de la siguiente división sea 5: $(x^3 + kx^2 - 4) : (x + 3)$

Se aplica el teorema del resto:

$P(-3) = 5 \Rightarrow 9k - 31 = 5 \Rightarrow k = 4$

108. Halla el valor de k para que $x^3 + 5x + k$ sea divisible entre $x + 2$

Se aplica el teorema del factor: $k = 18$

6. Ecuaciones de 1.^{er} y 2.^o grado

1. ECUACIONES DE 1.^{ER} GRADO

PIENSA Y CALCULA

Resuelve mentalmente:

- a) $x + 2 = 5$ b) $x - 3 = 4$
 c) $4x = 12$ d) $(x - 3)(x + 5) = 0$
 a) $x = 3$ b) $x = 7$
 c) $x = 3$ d) $x = 3, x = -5$

CARNÉ CALCULISTA

Calcula con dos decimales: 875,2 : 6,91

$C = 126,65; R = 0,0485$

APLICA LA TEORÍA

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $4x + 12 = 6x - 8$

$x = 10$

2. $6 + 3x = 4 + 7x - 2x$

$x = 1$

3. $8x - 2x + 4 = 2x$

$x = -1$

4. $4x + 3x - 4 = 3x + 8$

$x = 3$

5. $3(x + 2) + 2x = 5x - 2(x - 4)$

$x = 1$

6. $4 - 3(2x + 5) = 5 - (x - 3)$

$x = -19/5$

7. $2(x - 3) + 5(x + 2) = 4(x - 1) + 3$

$x = -5/3$

8. $5 - (2x + 4) = 3 - (3x + 2)$

$x = 0$

Resuelve mentalmente:

9. $x(x - 2)(x + 3) = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -3$

10. $(2x + 1)(x - 4)(3x + 5) = 0$

$x_1 = -1/2, x_2 = 4, x_3 = -5/3$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

11. $\frac{x - 3}{4} = \frac{x - 5}{6} + \frac{x - 1}{9}$

$x = 7$

12. $\frac{7 - x}{2} = \frac{9}{2} + \frac{7x - 5}{10}$

$x = -5/12$

13. $\frac{x}{3} + 3x - \frac{x - 2}{4} = \frac{1}{4} + x$

$x = -3/25$

14. $\frac{x - 1}{2} - \frac{x - 2}{3} + \frac{10 - 3x}{5} = 0$

$x = 5$

2. ECUACIONES DE 2.^º GRADO

PIENSA Y CALCULA

Resuelve mentalmente si es posible:

- a) $x^2 = 0$ b) $x(x - 3) = 0$
 c) $x^2 = 16$ d) $x^2 = -25$
 a) $x = 0$ b) $x = 0, x = 3$
 c) $x = -4, x = 4$ d) No tiene solución.

CARNÉ CALCULISTA

Desarrolla: $(2x + 7)^2 = 4x^2 + 28x + 49$

Factoriza: $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

APLICA LA TEORÍA

Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

15. $x^2 = 25$

$x_1 = 5, x_2 = -5$

16. $x^2 = 0$

$x_1 = x_2 = 0$

17. $x^2 = 49$

$x_1 = 7, x_2 = -7$

18. $5x^2 = 0$

$x_1 = x_2 = 0$

19. $x^2 - 1 = 0$

$x_1 = 1, x_2 = -1$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

20. $x^2 - 6x = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 6$

21. $x^2 - 16 = 0$

$x_1 = -4, x_2 = 4$

22. $7x^2 = 0$

$x_1 = x_2 = 0$

23. $x^2 - 5x + 6 = 0$

$x_1 = 3, x_2 = 2$

24. $x^2 + 5x = 0$

$x_1 = 0, x_2 = -5$

25. $x^2 - 25 = 0$

$x_1 = -5, x_2 = 5$

26. $x^2 - 9x = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 9$

27. $x^2 = 81$

$x_1 = -9, x_2 = 9$

28. $x^2 - 9 = 0$

$x_1 = -3, x_2 = 3$

29. $x^2 - 4x + 4 = 0$

$x_1 = x_2 = 2$

30. $x^2 + 8x = 0$

$x_1 = 0, x_2 = -8$

31. $4x^2 - 81 = 0$

$x_1 = -9/2, x_2 = 9/2$

32. $2x^2 - 3x - 20 = 0$

$x_1 = -5/2, x_2 = 4$

33. $4x^2 - 3x = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 3/4$

34. $x^2 = 4$

$x_1 = -2, x_2 = 2$

35. $8x^2 - 2x - 3 = 0$

$x_1 = -1/2, x_2 = 3/4$

36. $x(x - 3) = 10$

$x_1 = -2, x_2 = 5$

37. $(x + 2)(x + 3) = 6$

$x_1 = -5, x_2 = 0$

38. $(2x - 3)^2 = 8x$

$x_1 = 1/2, x_2 = 9/2$

39. $2x(x - 3) = 3x(x - 1)$

$x_1 = -3, x_2 = 0$

40. $\frac{3x}{2} - \frac{x^2 + x}{2} = \frac{3}{8}$

$x_1 = 1/2, x_2 = 3/2$

41. $\frac{9x - 4}{10} - x + \frac{x^2 + 2}{30} = 1$

$x_1 = -5, x_2 = 8$

**3. NÚMERO DE SOLUCIONES.
FACTORIZACIÓN**

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente las siguientes raíces cuadradas y da todas las soluciones reales:

a) $\sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}$ b) $\sqrt{6^2 - 4 \cdot 9}$ c) $\sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}$

a) ± 1 b) 0 c) No tiene solución real.

CARNÉ CALCULISTA

Calcula: $\frac{7}{6} : \frac{2}{5} - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{24}$

APLICA LA TEORÍA

Sin resolverlas y sin hallar el discriminante, calcula mentalmente cuántas soluciones tienen las ecuaciones:

42. $5x^2 - 12x = 0$

Tiene dos soluciones.

43. $x^2 + 25 = 0$

No tiene solución real.

44. $2x^2 = 0$

Tiene una solución doble.

45. $x^2 - 81 = 0$

Tiene dos soluciones.

Sin resolver las siguientes ecuaciones, determina cuántas soluciones tienen:

46. $x^2 - 6x + 7 = 0$

$\Delta = 36 - 28 = 8 > 0 \Rightarrow$ Tiene dos soluciones.

47. $x^2 - 8x + 16 = 0$

$\Delta = 64 - 64 = 0 \Rightarrow$ Tiene una solución doble.

48. $2x^2 - 3x + 5 = 0$

$\Delta = 9 - 40 = -31 < 0 \Rightarrow$ No tiene solución real.

49. $3x^2 - 9x - 3 = 0$

$\Delta = 81 + 36 = 117 > 0 \Rightarrow$ Tiene dos soluciones.

Halla mentalmente la descomposición factorial de los siguientes polinomios:

50. $x^2 + 4x + 4$

$(x + 2)^2$

51. $x^2 - 6x + 9$

$(x - 3)^2$

52. $x^2 - 25$

$(x + 5)(x - 5)$

53. $4x^2 + 4x + 1$

$(2x + 1)^2$

Halla la descomposición factorial de los siguientes polinomios:

54. $x^2 + 4x - 5$

$(x - 1)(x + 5)$

55. $x^2 - x - 2$

$(x - 2)(x + 1)$

56. $2x^2 + 9x - 5$

$2(x + 5)(x - 1/2)$

57. $8x^2 + 14x - 15$

$8(x + 5/2)(x - 3/4)$

Halla, en cada caso, una ecuación de 2.º grado cuyas soluciones son:

58. $x_1 = 5, x_2 = -7$

$(x - 5)(x + 7) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 35 = 0$

59. $x_1 = 2/5, x_2 = -3$

$(x - 2/5)(x + 3) = 0$
 $x^2 + 13x/5 - 6/5 = 0$
 $5x^2 + 13x - 6 = 0$

60. $x_1 = -4, x_2 = -2/3$

$$(x + 4)(x + 2/3) = 0$$

$$x^2 + 14x/3 + 8/3 = 0$$

$$3x^2 + 14x + 8 = 0$$

61. $x_1 = 3/5, x_2 = -1/2$

$$(x - 3/5)(x + 1/2) = 0$$

$$x^2 - x/10 - 3/10 = 0$$

$$10x^2 - x - 3 = 0$$

Calcula la suma y el producto de las soluciones de las siguientes ecuaciones, sin resolver estas:

62. $5x^2 - 15x + 9 = 0$

$$S = \frac{15}{5} = 3, P = \frac{9}{5}$$

63. $x^2 - 6x + 12 = 0$

$$S = 6, P = 12$$

64. $2x^2 - 5 = 0$

$$S = 0, P = -\frac{5}{2}$$

65. $3x^2 - 14x = 0$

$$S = \frac{14}{3} = 3, P = 0$$

4. PROBLEMAS DE ECUACIONES

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente:

a) El lado de un cuadrado cuya área es 16 m²

b) Tres números enteros consecutivos cuya suma sea 12

a) 4 m

b) 3, 4, 5

CARNÉ CALCULISTA

Desarrolla: $(2x + \frac{1}{3})(2x - \frac{1}{3}) = 4x^2 - \frac{1}{9}$

Factoriza: $9x^2 + 30x + 25 = (3x + 5)^2$

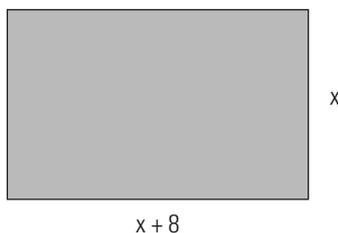
APLICA LA TEORÍA

66. La suma de dos números es 36, y uno es el doble del otro. Calcula dichos números.

$$x + 2x = 36 \Rightarrow x = 12$$

Los números son: 12 y 24

67. La base de un rectángulo mide 8 cm más que la altura. Si su perímetro mide 64 cm, calcula las dimensiones del rectángulo.



$$2(x + 8) + 2x = 64 \Rightarrow x = 12$$

Las dimensiones son: altura = 12 cm; base = 20 cm

68. Se mezcla café de 4,8 €/kg con café de 7,2 €/kg. Si se desea obtener 60 kg de mezcla a 6,5 €/kg, ¿cuántos kilos de cada clase se deben mezclar?

	Café A	Café B	Mezcla
Precio (€/kg)	4,8	7,2	6,5
Peso (kg)	x	60 - x	60
Dinero (€)	4,8x + 7,2(60 - x) = 6,50 · 60		

$$4,8x + 7,2(60 - x) = 6,5 \cdot 60 \Rightarrow x = 17,5$$

Café A: 17,5 kg Café B: 42,5 kg

69. Una madre tiene 26 años más que su hijo, y dentro de 10 años la edad de la madre será el doble de la del hijo. ¿Cuántos años tienen en la actualidad?

	Actualmente	Dentro de 10 años
Hijo	x	x + 10
Madre	x + 26	x + 36

$$x + 36 = 2(x + 10) \Rightarrow x = 16$$

Edad del hijo = 16 años. Edad de la madre = 42 años.

70. Una moto sale de una ciudad A hacia otra B con una velocidad de 70 km/h. Tres horas más tarde, un coche sale de la misma ciudad y en el mismo sentido con una velocidad de 100 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará el coche en alcanzar a la moto?



El espacio que recorre la moto es igual que el que recorre el coche y la fórmula es $e = v \cdot t$

$$70t = 100(t - 3) \Rightarrow t = 10$$

El coche tarda 7 horas en alcanzar a la moto.

71. Halla dos números cuya diferencia sea 5 y la suma de sus cuadrados sea 73

Un número x y el otro x - 5

$$x^2 + (x - 5)^2 = 73 \Rightarrow x = 8, x = -3$$

Hay dos soluciones:

N.º mayor = 8 \Rightarrow N.º menor = 3

N.º mayor = -3 \Rightarrow N.º menor = -8

72. La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 181. Halla dichos números.

Los números son x y x + 1

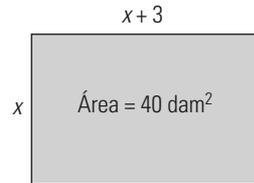
$$x^2 + (x + 1)^2 = 181 \Rightarrow x = 9, x = -10$$

Hay dos soluciones:

N.º menor = 9 \Rightarrow N.º mayor = 10

N.º menor = -10 \Rightarrow N.º mayor = -9

73. Calcula las dimensiones de una finca rectangular sabiendo que tiene 3 dam de larga más que de ancha y su superficie es de 40 dam²



$$x(x+3) = 40 \Rightarrow x = 5, x = -8$$

La solución negativa no tiene sentido.

Ancho = 5 dam

Largo = 8 dam

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. ECUACIONES DE 1.º GRADO

Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

74. $x + 2 = 9$

$$x = 7$$

75. $x - 2 = 3$

$$x = 5$$

76. $3x = 15$

$$x = 5$$

77. $\frac{x}{3} = 7$

$$x = 21$$

78. $4x = 3$

$$x = 3/4$$

79. $x - 5 = 0$

$$x = 5$$

80. $5x + 7 = 0$

$$x = -7/5$$

81. $x(x-4)(x+5) = 0$

$$x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = -5$$

82. $(3x+2)(5x-6)(x+5) = 0$

$$x_1 = -2/3, x_2 = 6/5, x_3 = -5$$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

83. $7x + 2 = 4x - 10$

$$x = -4$$

84. $5 + 3x - 2x = 7 + 4x - x$

$$x = -1$$

85. $6x - 3x + 5 = 2x + 1$

$$x = -4$$

86. $6 - 4x + 2x - 6 = 2x + 5$

$$x = -5/4$$

87. $4(x+5) + 3x = 4x - 3(x-4)$

$$x = -4/3$$

88. $9 - 2(3x+4) = 5 - 3(x-4)$

$$x = -16/3$$

89. $12 - (7x+5) = 4 - (5x+2)$

$$x = 5/2$$

90. $5(x-2) + 3(x+2) = 6(x-1)$

$$x = -1$$

91. $\frac{6x-1}{2} = \frac{x-1}{3} + \frac{4x+3}{2}$

$$x = 5/2$$

92. $\frac{4-x}{5} = 2 - \frac{3x-2}{10}$

$$x = 14$$

93. $\frac{3x}{2} - 2(x-3) - \frac{x-2}{4} = 5 + x$

$$x = 6/7$$

94. $\frac{x-5}{2} - \frac{2x-3}{3} + \frac{10-x}{12} = 0$

$$x = -8/3$$

2. ECUACIONES DE 2.º GRADO

Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

95. $x^2 = 81$

$$x_1 = 9, x_2 = -9$$

96. $2x^2 = 0$

$$x_1 = x_2 = 0$$

97. $x^2 = 36$

$$x_1 = 6, x_2 = -6$$

98. $7x^2 = 0$

$$x_1 = x_2 = 0$$

99. $x^2 - 64 = 0$

$$x_1 = 8, x_2 = -8$$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

100. $x^2 - 12x = 0$

$$x_1 = 0, x_2 = 12$$

101. $(x-2)^2 - 16 = 0$

$$x_1 = -2, x_2 = 6$$

102. $x^2 - 6x - 7 = 0$

$$x_1 = -1, x_2 = 7$$

103. $(x+1)^2 = 4x$

$$x_1 = x_2 = 1$$

104. $x^2 + x - 6 = 0$

$$x_1 = 2, x_2 = -3$$

105. $x^2 - 25 = 0$

$$x_1 = -5, x_2 = 5$$

106. $x(x - 4) = 2x(x - 3)$

$x_1 = 0, x_2 = 2$

107. $3(x - 2)^2 - 27 = 0$

$x_1 = -1, x_2 = 5$

108. $4x^2 - 9 = 0$

$x_1 = -3/2, x_2 = 3/2$

109. $6x^2 - 7x - 3 = 0$

$x_1 = -1/3, x_2 = 3/2$

110. $\frac{5x^2}{3} = 3\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{4}\right)$

$x_1 = -9/2, x_2 = 0$

111. $5x^2 - 4x = 2x^2$

$x_1 = 0, x_2 = 4/3$

112. $x^2 - 51x + 36 = 0$

$x_1 = 3/4, x_2 = 12$

113. $\frac{x^2 - 4x}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5x - 3x^2}{12} + \frac{1}{6}$

$x_1 = -2/5, x_2 = 3$

3. NÚMERO DE SOLUCIONES. FACTORIZACIÓN

Sin resolver las siguientes ecuaciones, determina cuántas soluciones tienen:

114. $x^2 + x - 12 = 0$

$\Delta = 1 + 48 = 49 > 0 \Rightarrow$ Tiene dos soluciones.

115. $x^2 - 4x + 13 = 0$

$\Delta = 16 - 52 = -36 < 0 \Rightarrow$ No tiene soluciones reales.

116. $9x^2 - 12x + 4 = 0$

$\Delta = 144 - 144 = 0 \Rightarrow$ Tiene una solución doble.

117. $4x^2 - 12x + 13 = 0$

$\Delta = 144 - 208 = -64 < 0 \Rightarrow$ No tiene soluciones reales.

Halla la descomposición factorial de los siguientes polinomios:

118. $4x^2 - 3x$

$4x(x - 3/4)$

119. $x^2 - 144$

$(x + 12)(x - 12)$

120. $9x^2 + 12x + 4$

$9(x + 2/3)^2$

121. $20x^2 - 7x - 6$

$20(x + 2/5)(x - 3/4)$

Halla, en cada caso, una ecuación de 2.º grado cuyas soluciones son:

122. $x_1 = 4, x_2 = -5$

$(x - 4)(x + 5) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 20 = 0$

123. $x_1 = 3/4, x_2 = -2$

$(x - 3/4)(x + 2) = 0$

$x^2 + 5x/4 - 3/2 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 5x - 6 = 0$

124. $x_1 = -3, x_2 = -1/3$

$(x + 3)(x + 1/3) = 0$

$x^2 + 10x/3 + 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 + 10x + 3 = 0$

125. $x_1 = 2/5, x_2 = -3/2$

$(x - 2/5)(x + 3/2) = 0$

$x^2 + 11x/10 - 3/5 = 0 \Rightarrow 10x^2 + 11x - 6 = 0$

Calcula la suma y el producto de las soluciones de las siguientes ecuaciones, sin resolver estas:

126. $x^2 - 8x + 3 = 0$

$S = 8, P = 3$

127. $x^2 - 7x + 2 = 0$

$S = 7, P = 2$

128. $6x^2 + x - 2 = 0$

$S = -1/6, P = -1/3$

129. $5x^2 - 16x + 3 = 0$

$S = 16/5, P = 3/5$

4. PROBLEMAS DE ECUACIONES

130. Calcula tres números enteros consecutivos tales que la suma de los tres sea igual al doble del segundo.

Primer número: $x - 1$

Segundo número: x

Tercer número: $x + 1$

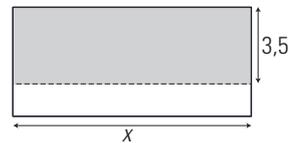
$x - 1 + x + x + 1 = 2x \Rightarrow x = 0$

Primer número = -1

Segundo número = 0

Tercer número = 1

131. Si se disminuye la altura de un rectángulo en 3,5 cm, el área disminuye en 21 cm². Calcula la base del rectángulo.



$3,5x = 21 \Rightarrow x = 6$

La base mide 6 cm

132. Hace siete años, la edad de un padre era cinco veces la del hijo. Si actualmente es solo el triple, ¿qué edad tiene cada uno?

	Hace 7 años	Actualmente
Hijo	x	$x + 7$
Padre	$5x$	$5x + 7$

$5x + 7 = 3(x + 7) \Rightarrow x = 7$

Edad del hijo = 14 años.

Edad del padre = 42 años.

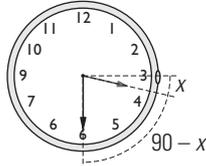
133. Se mezcla azúcar de 1,125 €/kg con azúcar de 1,4 €/kg y se obtienen 200 kg de mezcla a 1,29 €/kg. ¿Cuántos kilos de cada clase se han mezclado?

	Azúcar A	Azúcar B	Mezcla
Precio (€/kg)	1,125	1,4	1,29
Peso (kg)	x	$200 - x$	200
Dinero (€)	$1,125x + 1,4(200 - x) = 1,29 \cdot 200$		

$$1,125x + 1,4(200 - x) = 1,29 \cdot 200 \Rightarrow x = 80$$

Azúcar A: 80 kg Azúcar B: 120 kg

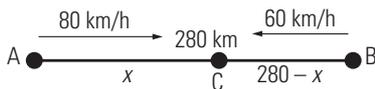
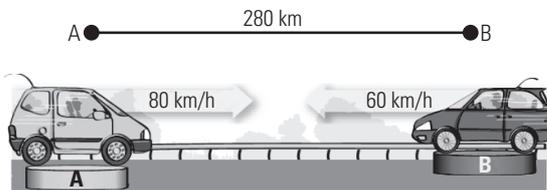
134. ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las tres y media?



$$12x = 180 \Rightarrow x = 15^\circ$$

El ángulo que forman es de $90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$

135. Un vehículo sale de A con dirección a B y lleva una velocidad constante de 80 km/h. En el mismo instante, otro vehículo sale de B hacia A con una velocidad de 60 km/h. Si la distancia entre A y B es de 280 km, ¿a qué distancia de A se cruzan los dos vehículos?



El tiempo que tardan ambos es el mismo y la fórmula es:

$$e = v \cdot t \Rightarrow t = \frac{e}{v}$$

$$\frac{x}{80} = \frac{280 - x}{60} \Rightarrow x = 160$$

Se encuentran a 160 km de A

136. Calcula dos números naturales consecutivos tales que su producto sea 132

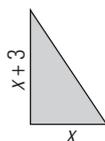
$$x(x + 1) = 132 \Rightarrow x = -12 \text{ y } x = 11$$

Hay dos soluciones:

Número menor = -12, número mayor = -11

Número menor = 11, número mayor = 12

137. Un triángulo rectángulo tiene un área de 44 m². Calcula la longitud de los catetos si uno de ellos mide 3 m más que el otro.



$$\frac{x(x + 3)}{2} = 44 \Rightarrow x = -11 \text{ y } x = 8$$

La solución negativa no tiene sentido.

Los catetos miden: 8 m y 11 m

PARA AMPLIAR

Resuelve las siguientes ecuaciones:

138. $4x + 2 = 3x + 8 - x$

$$x = 3$$

139. $2x + x - 12 + 7x = 9x - 10$

$$x = 2$$

140. $2x - 15 + x = 2x - 8$

$$x = 7$$

141. $5x + 9 + 3x = 2x + 5 + 7x$

$$x = 4$$

142. $3(x - 7) + 1 = 2x - 25$

$$x = -5$$

143. $3(x - 2) = 4(x - 1) - 5$

$$x = 3$$

144. $2(x - 2) - 3x = 2(x + 4) - 5x$

$$x = 6$$

145. $2 - (x + 2) = 2 - (3 - x)$

$$x = 1/2$$

146. $8(2x + 1) = 7 + 3(5x + 1)$

$$x = 2$$

147. $x - 3 - 2(2x - 6) = 2(x + 5)$

$$x = -1/5$$

148. $3x - (1 - 2x) - 2x = 4 - x - (5x - 6)$

$$x = 11/9$$

149. $4(3x - 1) - 3(x - 2) = 2(4x - 2)$

$$x = -6$$

150. $\frac{5x + 4}{3} = 13$

$$x = 7$$

151. $\frac{5x + 9}{3} = \frac{7x + 6}{6}$

$$x = -4$$

152. $\frac{x + 3}{2} - 1 = \frac{2x - 1}{5}$

$$x = -7$$

153. $\frac{x}{3} - \frac{5x - 2}{2} = x - \frac{2 - 5x}{6}$

$$x = 1/3$$

154. $\frac{5x - 1}{2} - \frac{4x + 1}{3} = \frac{x - 1}{2} + 4$

$$x = 13/2$$

155. $\frac{2 - x}{5} = 2 - \frac{x - 1}{2}$

$$x = 7$$

$$156. \frac{3x-2}{5} - 2(5x-4) - \frac{x+2}{4} = \frac{x+3}{2} - \frac{7}{6}$$

$$x = 2/3$$

$$157. \frac{3x}{4} - \frac{2x-3}{3} + \frac{7x+4}{2} = \frac{x}{3} - 5x$$

$$x = -4/11$$

$$158. \frac{x+2}{2} - \frac{1-2x}{7} = \frac{11-x}{14} - 3x+2$$

$$x = 1/2$$

$$159. \frac{x-3}{4} - \frac{x-2}{5} = x + \frac{1-x}{3} - \frac{8}{9}$$

$$x = 1/3$$

$$160. \frac{4x-1}{12} - \frac{x+2}{8} = \frac{5x}{8} - \frac{12x+1}{36}$$

$$x = -11/3$$

$$161. 3(x-1) - \frac{2x-3}{4} + \frac{11}{6} = \frac{7x-1}{3} + \frac{1}{12}$$

$$x = 1$$

$$162. \frac{x+1}{3} - \frac{1-2x}{4} = \frac{20-x}{12} + \frac{3x-5}{4}$$

$$x = 2$$

$$163. \frac{5x-7}{6} - x = \frac{2x-3}{4} + \frac{x}{2}$$

$$x = -5/14$$

$$164. \frac{x+1}{3} - \frac{3x+1}{6} = \frac{1}{6} - \frac{x+1}{9}$$

$$x = 2$$

$$165. x - \frac{1}{3} - \frac{2x-1}{5} = \frac{2x-1}{3}$$

$$x = 3$$

$$166. \frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{6} = \frac{2x-1}{5} + \frac{5}{2}$$

$$x = 3$$

$$167. \frac{x-2}{4} + \frac{11}{6} = \frac{x+1}{6} + \frac{x}{2}$$

$$x = 14/5$$

$$168. \frac{5-x}{2} - 18 = 4(1-x) - \frac{x+1}{3}$$

$$x = 5$$

$$169. \frac{x+3}{3} - \frac{x-2}{4} = \frac{7}{8} - \frac{x-3}{2}$$

$$x = 3/2$$

$$170. \frac{2x-1}{8} - \frac{x-4}{6} = \frac{17}{8} - \frac{x+2}{2}$$

$$x = 1$$

$$171. \frac{x-2}{6} = \frac{x+3}{4} - \frac{x+1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$x = 3/5$$

$$172. 5x^2 = 0$$

$$x_1 = x_2 = 0$$

$$173. x^2 - 81 = 0$$

$$x_1 = -9, x_2 = 9$$

$$174. x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$x_1 = -5, x_2 = 3$$

$$175. x^2 - 144 = 0$$

$$x_1 = -12, x_2 = 12$$

$$176. 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$x_1 = -1/2, x_2 = 3$$

$$177. x^2 - 4x = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4$$

$$178. x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x_1 = -2, x_2 = 6$$

$$179. 4x^2 - 25 = 0$$

$$x_1 = -5/2, x_2 = 5/2$$

$$180. 2x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_1 = -2, x_2 = 3/2$$

$$181. 5x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$x_1 = 2/5, x_2 = 1$$

$$182. x^2 - 169 = 0$$

$$x_1 = -13, x_2 = 13$$

$$183. 3x^2 - 11x + 6 = 0$$

$$x_1 = 2/3, x_2 = 3$$

$$184. 5x^2 - 9x = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 9/5$$

$$185. x^2 = 4x$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4$$

$$186. 25x^2 - 25x + 4 = 0$$

$$x_1 = 4/5, x_2 = 1/5$$

$$187. 4x^2 - 81 = 0$$

$$x_1 = -9/2, x_2 = 9/2$$

$$188. 6x^2 + 11x - 2 = 0$$

$$x_1 = -2, x_2 = 1/6$$

$$189. 4x^2 + 9x = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = -9/4$$

$$190. 4x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$x_1 = 3/4, x_2 = 1$$

$$191. 9x^2 - 1 = 0$$

$$x_1 = -1/3, x_2 = 1/3$$

192. $4x^2 - 8x + 3 = 0$

$x_1 = 3/2, x_2 = 1/2$

193. $5x^2 + x = 0$

$x_1 = -1/5, x_2 = 0$

194. $x^2 - 9x + 20 = 0$

$x_1 = 5, x_2 = 4$

195. $4x^2 + 3x - 10 = 0$

$x_1 = -2, x_2 = 5/4$

196. $25x^2 - 1 = 0$

$x_1 = -1/5, x_2 = 1/5$

197. $9x^2 - 18x - 7 = 0$

$x_1 = -1/3, x_2 = 7/3$

198. $5x^2 + 8x - 4 = 0$

$x_1 = -2, x_2 = 2/5$

199. $x + 4x^2 = 0$

$x_1 = -1/4, x_2 = 0$

200. $4x^2 - 17x + 15 = 0$

$x_1 = 3, x_2 = 5/4$

201. $7x^2 - 5x - 2 = 0$

$x_1 = -2/7, x_2 = 1$

202. $(3x - 1)^2 = 0$

$x_1 = x_2 = 1/3$

203. $x(x - 3) = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 3$

204. $(x - 1)(2x - 3) = 0$

$x_1 = 1, x_2 = 3/2$

205. $(x + 2)(x - 2) = 2(x + 3) + 5$

$x_1 = -3, x_2 = 5$

206. $2x(x + 1) - (6 + x) = (x + 3)(x - 2)$

$x_1 = x_2 = 0$

207. $x^2 + \frac{3x}{5} - \frac{26}{5} = 0$

$x_1 = -13/5, x_2 = 2$

208. $x^2 - \frac{3x}{4} - \frac{5}{8} = 0$

$x_1 = -1/2, x_2 = 5/4$

209. $x^2 - \frac{2x}{3} = \frac{8}{3}$

$x_1 = 2, x_2 = -4/3$

210. $x^2 - \frac{10x}{3} - \frac{8}{3} = 0$

$x_1 = -2/3, x_2 = 4$

211. $x^2 - 2x - \frac{3}{2} = \frac{x}{2}$

$x_1 = -1/2, x_2 = 3$

212. $6x^2 + 5 = 5x^2 + 8x - 10$

$x_1 = 5, x_2 = 3$

213. $10x^2 - 23x = 4x^2 - 7$

$x_1 = 1/3, x_2 = 7/2$

214. $(x - 7)^2 - 81 = 0$

$x_1 = -2, x_2 = 16$

215. $11x^2 - 6x - 3 = 2x^2 - 4$

$x_1 = x_2 = 1/3$

216. $\frac{2x^2}{3} - \frac{x+3}{2} = 3$

$x_1 = -9/4, x_2 = 3$

217. $\frac{x^2}{6} + \frac{x}{3} = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{3}$

$x_1 = x_2 = 2$

218. $\frac{x^2+2}{5} - \frac{x^2+x}{2} = \frac{3x+1}{10}$

$x_1 = -3, x_2 = 1/3$

219. $\frac{14x-3}{6} = \frac{x^2-x}{3} + \frac{10x+1}{6}$

$x_1 = 1, x_2 = 4/3$

220. $\frac{x^2-4x+1}{2} = \frac{2x^2-4x-3}{5}$

$x_1 = 11, x_2 = 1$

PROBLEMAS

221. Se ha plantado $1/5$ de la superficie de una huerta con cebollas; $1/15$ con patatas; $2/3$ con judías, y el resto, que son 240 m^2 , con tomates. ¿Qué superficie tiene la huerta?

Superficie de la huerta: x

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{15} + \frac{2x}{3} + 240 = x \Rightarrow x = 3600$$

La huerta mide 3600 m^2

222. Natalia y Roberto tienen, respectivamente, 8 y 2 años. ¿Al cabo de cuántos años la edad de Natalia será el doble de la de Roberto?

	Actualmente	Dentro de x años
Natalia	8	$8 + x$
Roberto	2	$2 + x$

$$8 + x = 2(2 + x) \Rightarrow x = 4$$

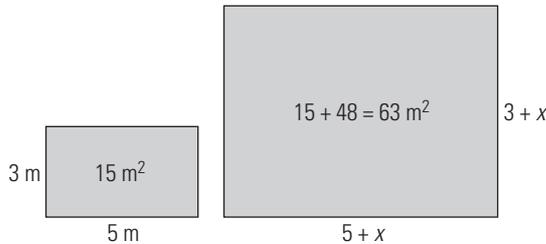
Dentro de 4 años, Natalia tendrá 12 y Roberto 6 años.

223. ¿Qué ángulo forman las agujas del reloj a las tres y cuarto?



Ángulo que forman las agujas: x
 $12x = 90 \Rightarrow x = 7,5$
 Formarán un ángulo de $7,5^\circ$

224. Los lados de un rectángulo miden 5 m y 3 m. Al aumentar los lados en una misma cantidad, el área aumenta en 48 m^2 . ¿Cuánto se ha ampliado cada lado?



$(5 + x)(3 + x) = 63$
 $x^2 + 8x + 15 = 63$
 $x^2 + 8x - 48 = 0$
 $x_1 = -12, x_2 = 4$
 La solución negativa no tiene sentido.
 Se aumenta 4 m

225. Dos ciudades A y B están a 300 km de distancia. A las diez de la mañana un coche sale desde A hacia B con una velocidad de 80 km/h. Dos horas más tarde, otro coche sale desde B hacia A con una velocidad de 120 km/h. ¿A qué hora se encuentran y a qué distancia de A?



$80t + 120(t - 2) = 300 \Rightarrow t = 2,7$
 Se encuentran a 2,7 h = 2 h 42 minutos, es decir, a las 12 horas y 42 minutos, y a una distancia $x = 216 \text{ km}$ de A

226. La edad de Rubén es la quinta parte de la edad de su padre. Dentro de 3 años, la edad de Rubén será la cuarta parte de la edad de su padre. ¿Qué edad tiene cada uno actualmente?

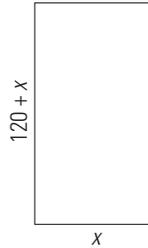
	Actualmente	Dentro de 3 años
Rubén	x	$x + 3$
Padre	$5x$	$5x + 3$

$4(x + 3) = 5x + 3 \Rightarrow x = 9$
 Edad de Rubén = 9 años.
 Edad del padre = 45 años.

227. Calcula un número tal que si se le quita su quinta parte, el resultado sea 60

Número: x
 $x - x/5 = 60$
 $x = 75$

228. El cristal rectangular de una puerta mide 120 cm más de alto que de ancho y su superficie mide 10800 cm^2 . Calcula cuánto miden los lados del cristal.



$x(120 + x) = 10800 \Rightarrow x = 60, x = -180$
 La solución negativa no tiene sentido.
 Ancho: 60 cm
 Alto: 180 cm

229. El producto de dos números enteros consecutivos es igual al cuádruple del menor menos 2 unidades. Encuentra dichos números.

Número menor: x
 Número mayor: $x + 1$
 $x(x + 1) = 4x - 2 \Rightarrow x = 1, x = 2$
 Hay dos soluciones:
 El número menor: 1; el número mayor: 2
 El número menor: 2; el número mayor: 3

230. Ana tiene 12 años, su hermano Pablo tiene 14, y su padre, 42. ¿Cuántos años deben pasar para que la suma de las edades de Ana y Pablo sea igual a la de su padre?

	Actualmente	Dentro de x años
Ana	12	$12 + x$
Pablo	14	$14 + x$
Padre	42	$42 + x$

$12 + x + 14 + x = 42 + x \Rightarrow x = 16$
 Tienen que pasar 16 años.

231. Calcula el área de un círculo sabiendo que si aumentamos el radio en 6 cm, el área se hace nueve veces más grande.

$9\pi R^2 = \pi(R + 6)^2 \Rightarrow R = 3, R = -3/2$
 El radio negativo no tiene sentido.
 El radio vale $R = 3 \text{ cm}$ y su área es $9\pi \text{ cm}^2$

232. Se mezclan 1800 kg de harina de 0,42 €/kg con 3500 kg de harina de 0,54 €/kg. ¿Qué precio tiene el kilo de la mezcla?

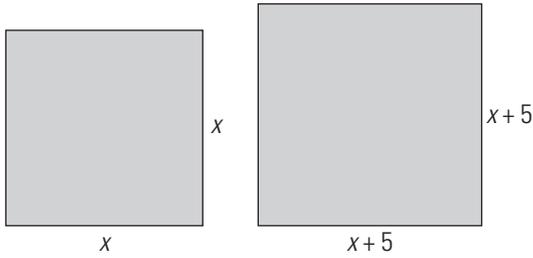
	Harina A	Harina B	Mezcla
Precio (€/kg)	0,42	0,54	x
Masa (kg)	1800	3500	5300
Dinero (€)	$0,42 \cdot 1800 + 0,54 \cdot 3500 = 5300 \cdot x$		

$0,42 \cdot 1800 + 0,54 \cdot 3500 = 5300x$
 $x = 0,499 = 0,5$

233. Sonia se ha comprado un libro y un disco que tenían el mismo precio, pero que han rebajado un 15% y un 10%, respectivamente, cuando ha ido a pagar. Si se ha ahorrado 9 €, ¿cuánto costaba cada producto?

Precio del libro = precio del disco: x
 $0,15x + 0,1x = 9 \Rightarrow x = 36$
 Los dos productos valían 36 €

234. Halla el lado de un cuadrado tal que, al aumentarlo en 5 unidades, el área aumente en 395 unidades cuadradas.



$$(x + 5)^2 = x^2 + 395$$

$$x = 37$$

El lado del cuadrado mide 37 unidades.

235. Calcula dos números enteros tales que su diferencia sea 2 y la suma de sus cuadrados sea 884

$$x^2 + (x - 2)^2 = 884 \Rightarrow x = -20, x = 22$$

Hay dos soluciones:
 Número menor: $-22 \Rightarrow$ número mayor: -20
 Número menor: $20 \Rightarrow$ número mayor: 22

236. ¿A qué hora coinciden, por primera vez, las manecillas del reloj después de las 12 horas?



Sea x el ángulo que recorre la aguja minutera.
 $12(x - 30) = x \Rightarrow x = 32,73^\circ$
 Se encontrarán cuando la aguja minutera haya recorrido un ángulo de $32,73^\circ$, es decir, $32,73^\circ : 30 = 1,09 \text{ h} = 1 \text{ hora } 5 \text{ minutos } 24 \text{ segundos}$.

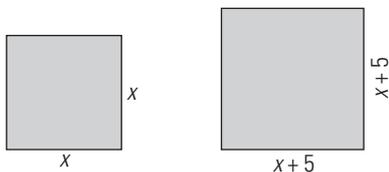
237. Ruth tiene 17 años y su madre tiene 47. ¿Cuánto ha de transcurrir para que la edad de la hija sea la mitad de la de la madre?

	Actualmente	Dentro de x años
Ruth	17	$17 + x$
Madre	47	$47 + x$

$$47 + x = 2(17 + x) \Rightarrow x = 13$$

A los 13 años.

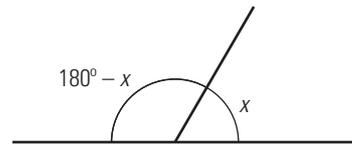
238. De un tablero de 2400 cm^2 se cortan dos piezas cuadradas, una de ellas con 5 cm más de lado que la otra. Si las tiras de madera que sobran miden 1283 cm^2 , ¿cuánto miden los lados de las piezas cuadradas cortadas?



$$x^2 + (x + 5)^2 + 1283 = 2400 \Rightarrow x = -26, x = 21$$

La solución negativa no tiene sentido.
 Las piezas son de 21 cm de lado y de $21 + 5 = 26 \text{ cm}$ de lado, respectivamente.

239. Halla un ángulo que sea igual a un tercio de su ángulo suplementario.



$$3x = 180 - x \Rightarrow x = 45$$

El ángulo es de 45°

240. Se desea obtener 8 000 kg de pienso mezclando maíz a un precio de 0,5 €/kg con cebada a un precio de 0,3 €/kg. Si se desea que el precio de la mezcla sea de 0,45 €/kg, ¿cuántos kilos de maíz y de cebada necesitamos?

	Maíz	Cebada	Mezcla
Precio (€/kg)	0,5	0,3	x
Masa (kg)	x	$8000 - x$	8 000
Dinero (€)	$0,5x + 0,3(8000 - x) = 45 \cdot 8000$		

$$0,5x + 0,3(8000 - x) = 0,45 \cdot 8000$$

$$x = 6000$$

Maíz: 6 000 kg
 Cebada: 2 000 kg

241. Andrés sale a caminar desde su casa a una velocidad de 6 km/h. Una hora más tarde, su hermana Virginia sale a buscarle en bicicleta a una velocidad de 26 km/h. ¿Cuánto tardará en alcanzarlo?



Tiempo que tarda Virginia en alcanzar a Andrés desde la salida de Andrés:
 $6t = 26(t - 1) \Rightarrow t = 13/10 \text{ h} = 1,3 \text{ h}$
 Tarda en alcanzarlo $3/10 \text{ h} = 0,3 \text{ h} = 18 \text{ min}$

242. Se desea mezclar 50 kg de azúcar blanca de 1,24 €/kg con azúcar morena de 1,48 €/kg. ¿Cuántos kilos de azúcar morena se necesitan para que la mezcla salga a 1,32 €/kg?

	Azúcar blanca	Azúcar morena	Mezcla
Precio (€/kg)	1,24	1,48	1,32
Masa (kg)	50	x	$50 + x$
Dinero (€)	$1,24 \cdot 50 + 1,48 \cdot x = 1,32(50 + x)$		

$$1,24 \cdot 50 + 1,48 \cdot x = 1,32(50 + x) \Rightarrow x = 25$$

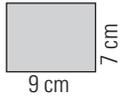
Se necesitan 25 kg de azúcar morena.

PARA PROFUNDIZAR

243. Elvira compra unos zapatos, una camisa y una chaqueta. Si la camisa cuesta la mitad que la chaqueta y esta la mitad que los zapatos, y ha pagado 126 €, ¿cuánto cuesta cada cosa?

Precio de la camisa: x
 $x + 2x + 4x = 126 \Rightarrow x = 18$
 La camisa vale 18 €, la chaqueta, 36 € y los zapatos, 72 €

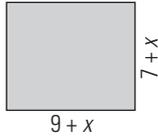
244. Los lados de un rectángulo miden 7 y 9 cm. Si se amplían los lados en una misma cantidad, la nueva área es de 143 cm². ¿Cuánto se ha ampliado cada lado?



$$(7+x)(9+x) = 143$$

$$x = -20, x = 4$$

La solución negativa no tiene sentido. Se ha ampliado 4 cm



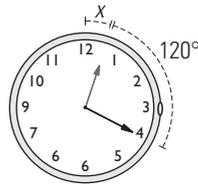
245. ¿A qué hora forman las manecillas del reloj un ángulo de 120° por primera vez después de las 12 horas?

Sea x el ángulo de la aguja horaria.

$$120 + x = 12x \Rightarrow x = 10,91$$

La aguja horaria recorre un ángulo de 10,91°

La aguja minutera recorre un ángulo de 130,91° que corresponde a 21,818 minutos, es decir, serán las: 12 horas 21 minutos y 49 segundos.



246. Calcula un número tal que multiplicado por su mitad sea igual a su cuarta parte más 9

Número: x

$$x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{4} + 9 \Rightarrow x = -4, x = 9/2$$

247. Halla un número cuya mitad más su cuarta parte sea igual a 39

Número: x

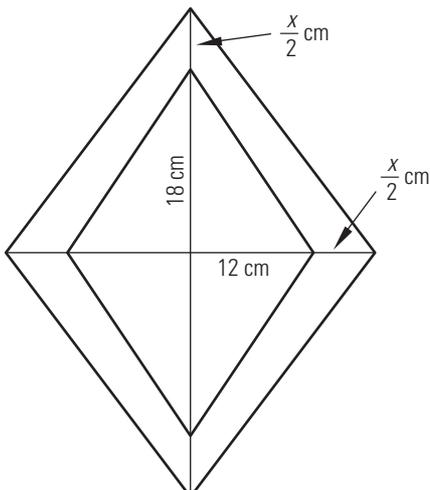
$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 39 \Rightarrow x = 52$$

248. Halla un número cuya mitad, más su tercera parte, más una unidad, sea igual que el número.

Número: x

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 1 = x \Rightarrow x = 6$$

249. Las diagonales de un rombo miden 18 cm y 12 cm. ¿Qué longitud se debe añadir a las diagonales para que el área del rombo se duplique?



$$\frac{(18+x)(12+x)}{4} = 2 \cdot \frac{18 \cdot 12}{4}$$

$$x_1 = -36, x_2 = 6$$

La solución negativa no tiene sentido.

Hay que aumentar 6 cm

250. Halla el valor de k en la siguiente ecuación de forma que su solución sea 2:

$$kx - 3 = 3x - 1$$

$$2k - 3 = 6 - 1$$

$$k = 4$$

251. Una solución de la ecuación $10x^2 - 11x - 6 = 0$ es $3/2$. Calcula la otra solución sin resolver la ecuación.

$$3/2 + x_2 = -b/a$$

$$3/2 + x_2 = 11/10$$

$$x_2 = 11/10 - 3/2 = -2/5$$

252. En la ecuación $8x^2 - 18x + k = 0$, halla el valor de k de forma que una solución sea el doble de la otra.

Sean las soluciones $x_1, x_2 = 2x_1$

$$x_1 + x_2 = -b/a \Rightarrow 3x_1 = 9/4 \Rightarrow x_1 = 3/4$$

$$x_1 \cdot x_2 = c/a \Rightarrow 2x_1^2 = k/8$$

$$9/8 = k/8$$

$$k = 9$$

Para $k = 9$ las soluciones son $x_1 = 3/4, x_2 = 3/2$

253. Un grifo llena un depósito en 3 horas y otro lo hace en 6 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en llenar el depósito los dos grifos a la vez?

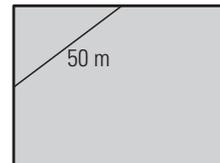


Tiempo que tardan: x

$$(1/3 + 1/6)x = 1 \Rightarrow x = 2$$

Tardan 2 horas.

254. En un rectángulo, el segmento que une los puntos medios de dos lados consecutivos mide 50 m. Si la razón de los lados es $4/3$, calcula el área del rectángulo.



Sea x la mitad del lado menor.

$$x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2 = 50^2 \Rightarrow x = -30, x = 30$$

La solución negativa no tiene sentido.

Para $x = 30$ m, el área es:

$$A = 80 \cdot 60 = 4800 \text{ m}^2$$

255. Julio invierte 14 000 € en acciones de dos empresas. En una gana el 15% y en otra pierde un 3,5%. Si al venderlas obtiene 14 620 €, ¿cuánto invirtió en cada empresa?

261. Halla la descomposición factorial del polinomio $x^2 + x - 6$

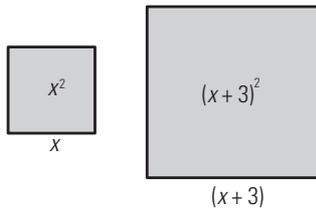
Resuelto en el libro del alumnado.

262. Halla una ecuación de 2.º grado que tenga las raíces 5 y -3

Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de Wiris:

263. El lado de un cuadrado mide 3 m más que el lado de otro cuadrado. Si la suma de las dos áreas es 89 m^2 , calcula las dimensiones de los cuadrados.



Resuelto en el libro del alumnado.

PRACTICA

Resuelve las siguientes ecuaciones:

264. $6 + 3x = 4 + 7x - 2x$

$x = 1$

265. $4 - 3(2x + 5) = 5 - (x - 3)$

$x = -19/5$

266. $\frac{7-x}{2} = \frac{9}{2} + \frac{7x-5}{10}$

$x = -5/12$

267. $\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} + \frac{10-3x}{5} = 0$

$x = 5$

268. $4x^2 - 3x = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 3/4$

269. $4x^2 - 81 = 0$

$x_1 = -9/2, x_2 = 9/2$

270. $x^2 - 5x + 6 = 0$

$x_1 = 3, x_2 = 2$

271. $x^2 - 4x + 4 = 0$

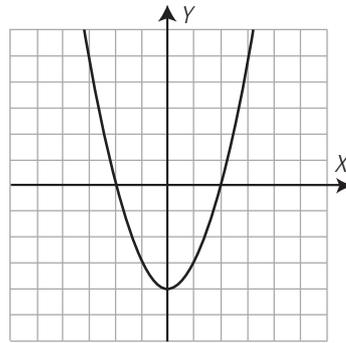
$x_1 = x_2 = 2$

272. $8x^2 - 2x - 3 = 0$

$x_1 = -1/2, x_2 = 3/4$

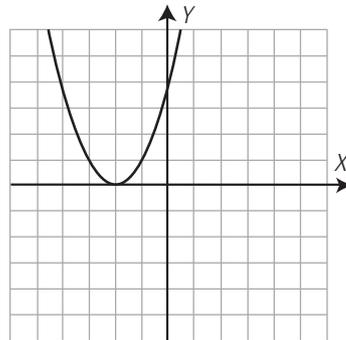
Representa gráficamente las siguientes parábolas y calcula las soluciones de las ecuaciones correspondientes observando las gráficas.

273. $y = x^2 - 4$



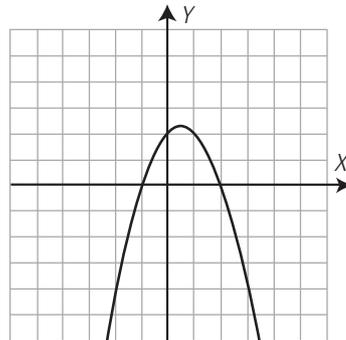
$x_1 = -2, x_2 = 2$

274. $y = x^2 + 4x + 4$



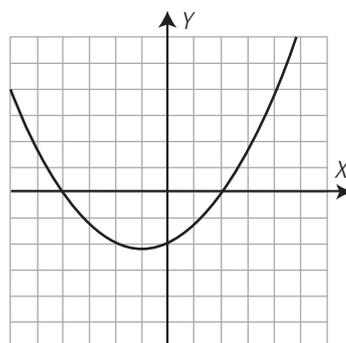
$x_1 = x_2 = -2$

275. $y = -x^2 + x + 2$



$x_1 = -1, x_2 = 2$

276. $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$



$x_1 = -4, x_2 = 2$

Halla la descomposición factorial de los siguientes trinomios de segundo grado:

277. $x^2 - x - 20$

$$(x + 4)(x - 5)$$

278. $x^2 + 8x + 15$

$$(x + 3)(x + 5)$$

Halla una ecuación de segundo grado que tenga las raíces:

279. $x_1 = 7, x_2 = -9$

$$x^2 + 2x - 63 = 0$$

280. $x_1 = 1, x_2 = 2$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris:

281. Calcula un número tal que, si se le quita su quinta parte, el resultado sea 60

$$x - x/5 = 60$$

$$x = 75$$

282. Halla los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que son números enteros consecutivos.

Cateto menor: x

$$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$$

$$x_1 = -1, x_2 = 3$$

La solución negativa no tiene sentido.

Los lados del triángulo miden: 3, 4 y 5 cm

283. Halla el lado de un cuadrado tal que, al aumentarlo en 5 unidades, el área aumente en 395 unidades cuadradas.

$$(x + 5)^2 = x^2 + 395 \quad x = 37$$

284. Se desea mezclar 50 kg de azúcar blanca de 1,24 €/kg con azúcar moreno de 1,48 €/kg. ¿Cuántos kilos de azúcar moreno se necesitan para que la mezcla salga a 1,32 €/kg?

$$1,24 \cdot 50 + 1,48 \cdot x = 1,32(50 + x) \quad x = 25 \text{ kg}$$

285. Las diagonales de un rombo miden 18 cm y 12 cm. ¿Qué longitud se debe añadir a las diagonales para que el área del rombo se duplique?

$$\frac{(18 + x)(12 + x)}{2} = 2 \frac{18 \cdot 12}{2}$$

$$x_1 = -36, x_2 = 6$$

La solución negativa no tiene sentido.

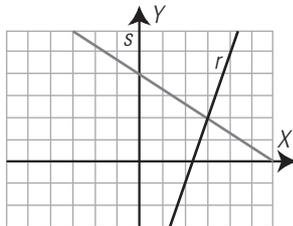
Hay que aumentar 6 cm

7. Sistemas de ecuaciones lineales

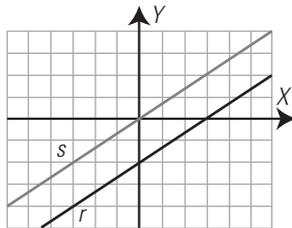
1. SISTEMAS LINEALES. RESOLUCIÓN GRÁFICA

PIENSA Y CALCULA

a) ¿En qué punto se cortan la gráfica roja y la azul del dibujo?



b) ¿Tienen algún punto en común las rectas del dibujo? ¿Cómo son estas rectas?



a) $P(3, 2)$

b) No. Son paralelas.

CARNÉ CALCULISTA

Calcula con dos decimales: $73,58 : 0,24$

$C = 306,58$; $R = 0,0008$

APLICA LA TEORÍA

1. Comprueba que $x = 2, y = -3$ es solución del siguiente sistema:

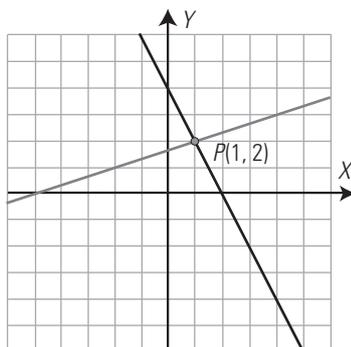
$$\begin{cases} 3x - y = 9 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$3 \cdot 2 - (-3) = 6 + 3 = 9$$

$$5 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 10 - 6 = 4$$

2. Resuelve gráficamente el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 3y = -5 \end{cases}$$



$x = 1, y = 2$

3. Aplica el criterio que relaciona los coeficientes del siguiente sistema para hallar cuántas soluciones tiene, haz la interpretación gráfica, clasifícalo y resuélvelo gráficamente:

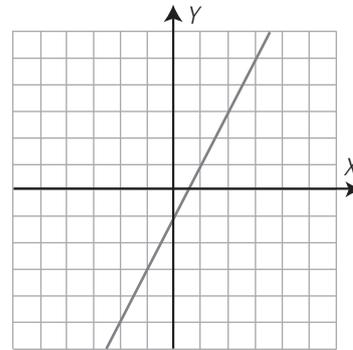
$$\begin{cases} -2x + y = -1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$$

Criterio: $\frac{-2}{4} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}$

Tiene infinitas soluciones.

Son rectas coincidentes.

Sistema compatible indeterminado.



$x_1 = 1, y_1 = 1; x_2 = 2, y_2 = 3; x_3 = 3, y_3 = 5, \dots$

4. Aplica el criterio que relaciona los coeficientes del siguiente sistema para hallar cuántas soluciones tiene, haz la interpretación gráfica, clasifícalo y resuélvelo gráficamente:

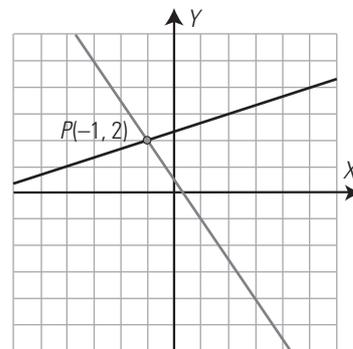
$$\begin{cases} x - 3y = -7 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

Criterio: $\frac{1}{3} \neq \frac{-3}{2}$

Tiene una solución.

Son rectas secantes.

Sistema compatible determinado.



$x = -1, y = 2$

5. Aplica el criterio que relaciona los coeficientes del siguiente sistema para hallar cuántas soluciones tiene. Haz la interpretación gráfica, clasifícalo y resuélvelo gráficamente:

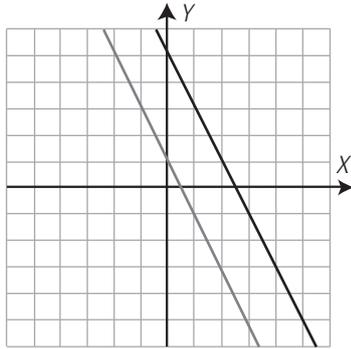
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 3 \end{cases}$$

Criterio: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \neq \frac{5}{3}$

No tiene una solución.

Son rectas paralelas.

Sistema incompatible.



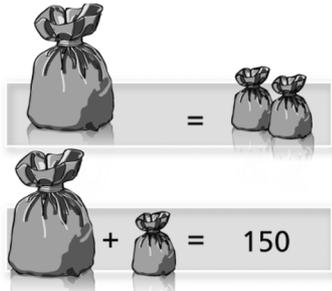
6. Escribe un sistema que tenga como solución $x = 2$, $y = -3$
- $$\left. \begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - y &= -1 \end{aligned} \right\}$$

2. MÉTODOS DE SUSTITUCIÓN E IGUALACIÓN

PIENSA Y CALCULA

Resuelve mentalmente el siguiente sistema sustituyendo el valor de y de la primera ecuación en la segunda:

$$\left. \begin{aligned} y &= 2x \\ x + y &= 150 \end{aligned} \right\}$$



$$\begin{aligned} x + 2x &= 150 \Rightarrow 3x = 150 \Rightarrow x = 50 \\ y &= 2x \Rightarrow y = 2 \cdot 50 = 100 \end{aligned}$$

CARNÉ CALCULISTA

Desarrolla: $(2a - 5)^2 = 4a^2 - 20a + 25$

Factoriza: $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

APLICA LA TEORÍA

7. Resuelve por el método más sencillo:

$$\left. \begin{aligned} y &= 3 - 2x \\ 3x - 4y &= 10 \end{aligned} \right\}$$

Se sustituye el valor de y de la primera ecuación en la segunda.

$$x = 2, y = -1$$

8. Resuelve por el método más sencillo:

$$\left. \begin{aligned} y &= 3x - 7 \\ y &= 13 - 2x \end{aligned} \right\}$$

Se igualan los valores de la y .

$$x = 4, y = 5$$

9. Resuelve por el método más sencillo:

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y &= 12 \\ x &= 5y - 7 \end{aligned} \right\}$$

Se sustituye el valor de x de la segunda ecuación en la primera ecuación.

$$x = 3, y = 2$$

10. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} x &= 2y + 1 \\ x &= -1 - 6y \end{aligned} \right\}$$

Se igualan los valores de la x .

$$x = 1/2, y = -1/4$$

11. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{2} &= 11 - 3y \\ 2x - \frac{y}{3} &= 7 \end{aligned} \right\}$$

Se eliminan los denominadores:

$$\left. \begin{aligned} x &= 22 - 6y \\ 6x - y &= 21 \end{aligned} \right\}$$

Se sustituye el valor de x de la primera ecuación en la segunda.

$$x = 4, y = 3$$

12. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} y &= 1 - 0,5x \\ y &= 0,25x + 0,25 \end{aligned} \right\}$$

Se igualan los valores de la y .

$$x = 1, y = 0,5$$

3. REDUCCIÓN Y QUÉ MÉTODO UTILIZAR

PIENSA Y CALCULA

Suma mentalmente las dos ecuaciones del sistema y halla el valor de x

Sustituye mentalmente este valor en la primera ecuación y halla el valor de y

$$\left. \begin{aligned} 5x + 2y &= 12 \\ 3x - 2y &= 4 \end{aligned} \right\}$$

$$8x = 16 \Rightarrow x = 2$$

$$5 \cdot 2 + 2y = 12 \Rightarrow y = 1$$

CARNÉ CALCULISTA

Resuelve la ecuación: $\frac{2x - 1}{4} - \frac{3x + 1}{5} = \frac{5x - 2}{6}$

$$x = \frac{1}{8}$$

APLICA LA TEORÍA

13. Resuelve por el método más sencillo:

$$\left. \begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \\ 5x - 2y &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Se suman las dos ecuaciones.

$$x = 1, y = 2$$

14. Resuelve por el método más sencillo:

$$\left. \begin{aligned} 3x - 2y &= 8 \\ 3x + 7y &= -1 \end{aligned} \right\}$$

Se cambia de signo la primera ecuación y se suman.

$$x = 2, y = -1$$

15. Resuelve por el método más sencillo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x + 5y = 3 \end{cases}$$

Se multiplica la primera ecuación por 3 y se le resta la segunda.

$$x = -2, y = 3$$

16. Resuelve por el método más sencillo:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ 4x + 5y = 2 \end{cases}$$

Se multiplica la primera ecuación por 5 y la segunda por 2 y se suman.

$$x = 3, y = -2$$

17. Resuelve el siguiente sistema por el método más sencillo:

$$\begin{cases} y = 4x - 1 \\ 2x + 3y = 25 \end{cases}$$

Por sustitución.

$$x = 2, y = 7$$

18. Resuelve por el método más sencillo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - 3y = -4 \end{cases}$$

Por reducción, se suman las dos ecuaciones.

$$x = 1/2, y = 2$$

19. Resuelve el siguiente sistema por el método más sencillo:

$$\begin{cases} x = 2y - 1 \\ x = 3y - 6 \end{cases}$$

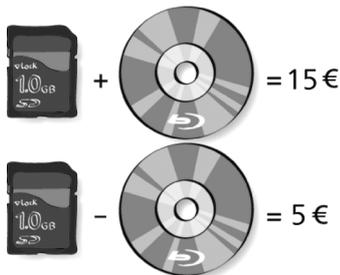
Por igualación.

$$x = 9, y = 5$$

4. PROBLEMAS DE SISTEMAS

PIENSA Y CALCULA

En el dibujo está planteado un sistema correspondiente a dos ecuaciones con dos incógnitas.



a) Suma las dos ecuaciones y halla el valor de una tarjeta.

b) Observando la primera ecuación y sabiendo el valor de una tarjeta, calcula el valor de un disco blu-ray.

a) $2 \text{ tarjetas} = 20 \text{ €} \Rightarrow 1 \text{ tarjeta} = 10 \text{ €}$

b) $1 \text{ disco blu-ray} = 5 \text{ €}$

CARNÉ CALCULISTA

Resuelve la ecuación: $3x^2 - 6x = 0$

$$x = 0, x = 2$$

APLICA LA TEORÍA

20. Halla dos números sabiendo que uno es el doble del otro y que entre los dos suman 51

Primer número: x

Segundo número: y

$$\begin{cases} y = 2x \\ x + y = 51 \end{cases}$$

$$x = 17, y = 34$$

21. En un garaje hay 18 vehículos entre coches y motos. Sin contar las ruedas de repuesto hay 58 ruedas. ¿Cuántas motos y coches hay?

Número de coches: x

Número de motos: y

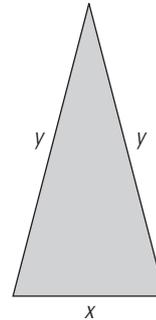
$$\begin{cases} x + y = 18 \\ 4x + 2y = 58 \end{cases}$$

$$\text{Coches: } x = 11, \text{ motos: } y = 7$$

22. El perímetro de un triángulo isósceles mide 65 m, y cada uno de los lados iguales mide el doble del lado desigual. ¿Cuánto mide cada lado?

Medida del lado desigual: x

Medida de cada uno de los lados iguales: y



$$\begin{cases} x + 2y = 65 \\ y = 2x \end{cases}$$

Lado desigual: $x = 13 \text{ m}$

Cada lado igual: $y = 26 \text{ m}$

23. El doble de un número más el triple de otro número es igual a 80, y el quintuplo del primero menos la mitad del segundo es igual a 56. ¿De qué números se trata?

Primer número: x

Segundo número: y

$$\begin{cases} 2x + 3y = 80 \\ 5x - y/2 = 56 \end{cases}$$

$$x = 13, y = 18$$

24. Los alumnos de un centro van a ir al teatro. El precio de una entrada sin descuento es de 4,5 € y con descuento especial para colegios es de 1,5 €. Se sacan 250 entradas, unas con descuento y otras sin descuento, y en total se pagan 675 €. ¿Cuántas entradas se han comprado con descuento? ¿Y sin descuento?

Número de entradas sin descuento: x

Número de entradas con descuento: y

$$\begin{cases} x + y = 250 \\ 4,5x + 1,5y = 675 \end{cases}$$

Entradas sin descuento: $x = 100 \text{ entradas}$.

Entradas con descuento: $y = 150 \text{ entradas}$.

25. Tres DVD y 2 CD cuestan 12 €; 4 DVD y 4 CD cuestan 18 €. Calcula cuánto cuestan cada DVD y cada CD.

Precio del DVD: x
 Precio del CD: y
 $3x + 2y = 12$
 $4x + 4y = 18$
 Cada DVD: $x = 3$ €
 Cada CD: $y = 1,5$ €

26. Halla la ecuación de la recta $ax + by = 2$ sabiendo que pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(3, 7)$

$a + 2b = 2$
 $3a + 7b = 2$
 $a = 10, b = -4$
 La recta es: $10x - 4y = 2 \Rightarrow 5x - 2y = 1$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. SISTEMAS LINEALES. RESOLUCIÓN GRÁFICA

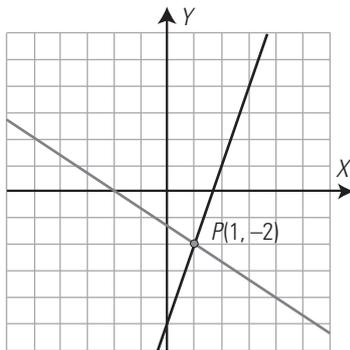
27. Comprueba que $x = -1, y = 5$ es solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} -3x + 2y = 13 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$$

$-3 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 = 3 + 10 = 13$
 $4 \cdot (-1) + 5 = -4 + 5 = 1$

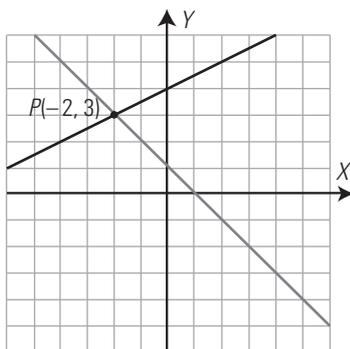
Resuelve gráficamente los siguientes sistemas:

28. $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$



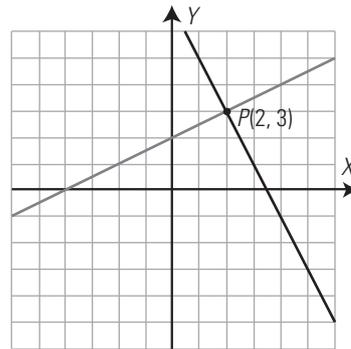
$x = 1, y = -2$

29. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = -8 \end{cases}$



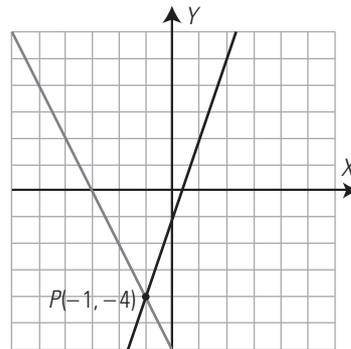
$x = -2, y = 3$

30. $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$



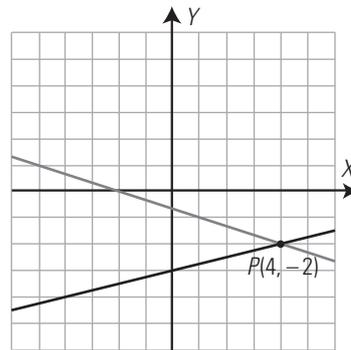
$x = 2, y = 3$

31. $\begin{cases} 2x + y = -6 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$



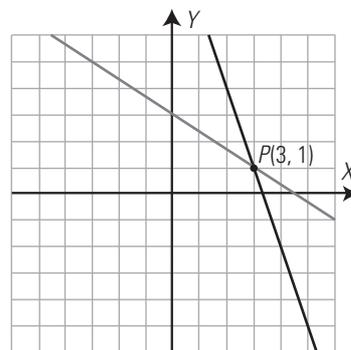
$x = -1, y = -4$

32. $\begin{cases} x - 4y = 12 \\ x + 3y = -2 \end{cases}$



$x = 4, y = -2$

33. $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$



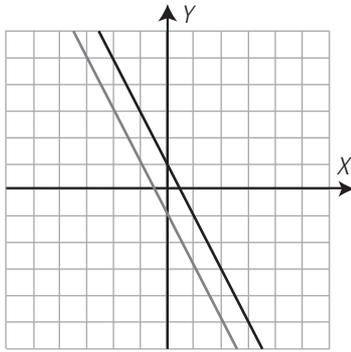
$x = 3, y = 1$

Aplica el criterio que relaciona los coeficientes de cada sistema para hallar cuántas soluciones tiene, haz la interpretación gráfica, clasifícalo y resuélvelo gráficamente:

$$34. \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

Criterio: $\frac{2}{2} = \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$

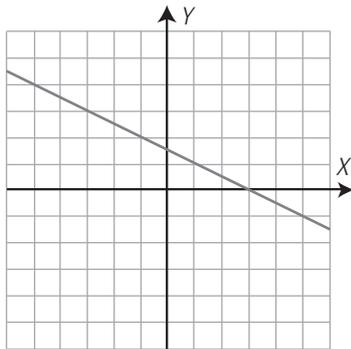
No tiene solución.
Son rectas paralelas.
Sistema incompatible.



$$35. \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$

Criterio: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

Tiene infinitas soluciones.
Son rectas coincidentes.
Sistema compatible indeterminado.

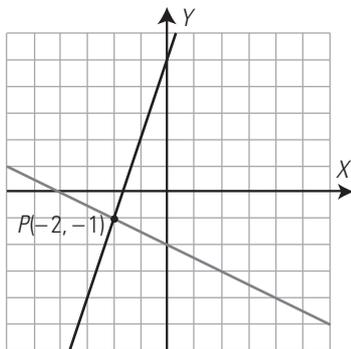


$x_1 = -1, y_1 = 2; x_2 = 3, y_2 = 0; x_3 = 5, y_3 = -1 \dots$

$$36. \begin{cases} 3x - y = -5 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$$

Criterio: $\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{2}$

Tiene una solución.
Son rectas secantes.
Sistema compatible determinado.

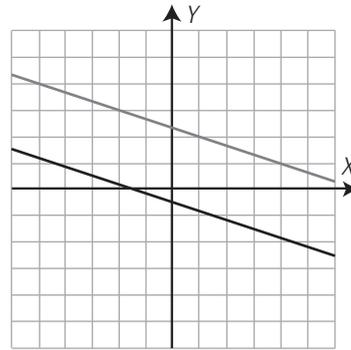


$x = -2, y = -1$

$$37. \begin{cases} x + 3y = 7 \\ 3x + 9y = -5 \end{cases}$$

Criterio: $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} \neq \frac{7}{-5}$

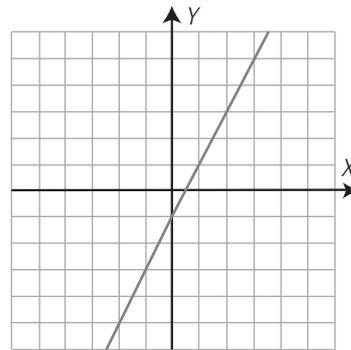
No tiene solución.
Son rectas paralelas.
Sistema incompatible.



$$38. \begin{cases} -2x + y = -1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$$

Criterio: $\frac{-2}{4} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}$

Tiene infinitas soluciones.
Son rectas coincidentes.
Sistema compatible indeterminado.

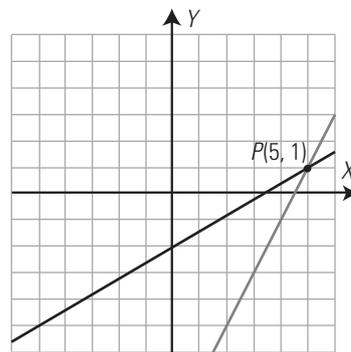


$x_1 = 0, y_1 = -1; x_2 = 1, y_2 = 1; x_3 = 2, y_3 = 3 \dots$

$$39. \begin{cases} 2x - y = 9 \\ 3x - 5y = 10 \end{cases}$$

Criterio: $\frac{2}{3} \neq \frac{-1}{-5}$

Tiene una solución.
Son rectas secantes.
Sistema compatible determinado.



$x = 5, y = 1$

40. Escribe un sistema que tenga como solución:

$$x = -1, y = 2$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y = 3 \end{cases}$$

2. MÉTODOS DE SUSTITUCIÓN E IGUALACIÓN

Resuelve por el método más sencillo:

$$41. \begin{cases} x = -2y \\ 3x + 7y = 1 \end{cases}$$

Se sustituye el valor de x de la primera ecuación en la segunda ecuación.

$$x = -2, y = 1$$

$$42. \begin{cases} 7x + 2y = 4 \\ y = 1 - 5x \end{cases}$$

Se sustituye el valor de y de la segunda ecuación en la primera ecuación.

$$x = -2/3, y = 13/3$$

$$43. \begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = 1 - 2x \end{cases}$$

Se igualan los valores de la y .

$$x = 6/5, y = -7/5$$

$$44. \begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = 5x - 4 \end{cases}$$

Se aplica el método de igualación.

Se igualan los valores de y .

$$x = 1, y = 1$$

$$45. \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ y = 7 - 3x \end{cases}$$

Se sustituye el valor de y de la segunda ecuación en la primera ecuación.

$$x = 2, y = 1$$

$$46. \begin{cases} x = 3 - 0,75y \\ x = 0,5y + 5 \end{cases}$$

Se aplica el método de igualación.

Se igualan los valores de x .

$$x = 4,2, y = -1,6$$

3. REDUCCIÓN Y QUÉ MÉTODO UTILIZAR

Resuelve por el método más sencillo:

$$47. \begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ -3x + 5y = 11 \end{cases}$$

Se aplica el método de reducción.

Se suman las dos ecuaciones.

$$x = 3, y = 4$$

$$48. \begin{cases} y = 3 - 2x \\ 3x - 4y = 10 \end{cases}$$

Se aplica el método de sustitución.

Se sustituye el valor de y de la primera ecuación en la segunda ecuación.

$$x = 2, y = -1$$

$$49. \begin{cases} 4x - 5y = 22 \\ 3x - 5y = 19 \end{cases}$$

Se aplica el método de reducción.

Se cambia de signo la segunda ecuación y se suman.

$$x = 3, y = -2$$

$$50. \begin{cases} x = 2y + 3 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

Se aplica el método de sustitución.

Se sustituye el valor de x de la primera ecuación en la segunda ecuación.

$$x = 11/5, y = -2/5$$

$$51. \begin{cases} 3x - 4y = 3 \\ 5x + 6y = 5 \end{cases}$$

Se aplica el método de reducción.

m.c.m. (4, 6) = 12

Se multiplica la primera por 3 y la segunda por 2 y se suman.

$$x = 1, y = 0$$

$$52. \begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 4x - 2 \end{cases}$$

Se aplica el método de igualación.

Se igualan los valores de y de las dos ecuaciones.

$$x = 3, y = 10$$

$$53. \begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 5x + 4y = 11 \end{cases}$$

Se aplica el método de reducción.

Se multiplica la primera ecuación por 4 y la segunda por 3 y se suman.

$$x = 3, y = -1$$

$$54. \begin{cases} y = 2x + 8 \\ y = -x - 1 \end{cases}$$

Se aplica el método de igualación.

Se igualan los valores de y

$$x = -3, y = 2$$

$$55. \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 5 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1 \end{cases}$$

Se eliminan denominadores.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 30 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

Se aplica el método de sustitución.

Se despeja y de la segunda ecuación y se sustituye en la primera.

$$x = 21/4, y = 13/2$$

$$56. \begin{cases} \frac{x-2}{4} + \frac{y}{5} = \frac{1}{2} \\ 3(x-1) + 2(y+3) = 4 \end{cases}$$

Se eliminan denominadores:

$$\begin{cases} 5x - 4y = 20 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

Se resuelve por reducción multiplicando la segunda ecuación por 2 y sumando.

$$x = 2, y = -5/2$$

4. PROBLEMAS DE SISTEMAS

57. Halla dos números sabiendo que uno es el cuadruplo del otro y que entre los dos suman 55

Primer número: x
 Segundo número: y

$$\left. \begin{array}{l} y = 4x \\ x + y = 55 \end{array} \right\}$$

 $x = 11, y = 44$

58. Dos hogazas de pan y 8 barras pesan 6 kg y 12 barras y una hogaza pesan 4 kg. ¿Cuánto pesa cada barra de pan y cada hogaza?

Peso de la hogaza: x
 Peso de la barra: y

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 8y = 6 \\ x + 12y = 4 \end{array} \right\}$$

 Peso hogaza: $x = 2,5$ kg
 Peso de la barra: $y = 0,125$ kg = 125 g

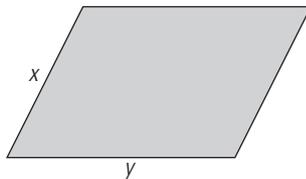
59. El triple de un número menos el doble de otro número es igual a 45 y el doble del primero menos la cuarta parte del segundo es igual a 43. ¿De qué números se trata?

Primer número: x
 Segundo número: y

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 45 \\ 2x + y/4 = 43 \end{array} \right\}$$

 $x = 23, y = 12$

60. El perímetro de un romboide mide 42 m y un lado mide 7 metros más que el otro. ¿Cuánto mide cada lado?

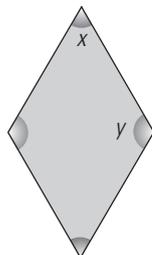


Lado menor: x
 Lado mayor: y

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y = 42 \\ y = x + 7 \end{array} \right\}$$

 $x = 7$ m, $y = 14$ m

61. Un ángulo de un rombo mide el doble que el otro. ¿Cuánto mide cada ángulo?



Ángulo menor: x
 Ángulo mayor: y

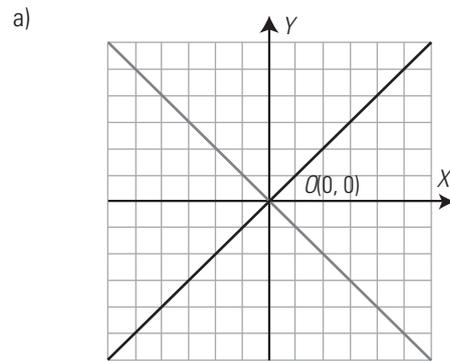
$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ x + y = 180 \end{array} \right\}$$

 $x = 60^\circ, y = 120^\circ$

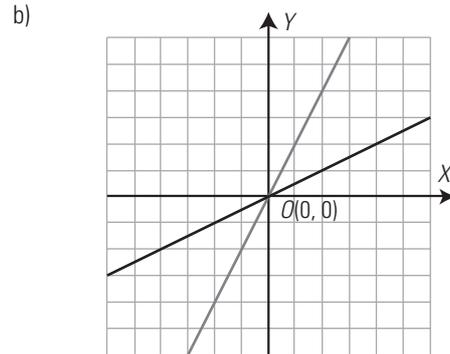
PARA AMPLIAR

62. Resuelve gráficamente los sistemas:

a) $\left. \begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{array} \right\}$ b) $\left. \begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right\}$



$x = 0, y = 0$



$x = 0, y = 0$

Resuelve por el método más sencillo los siguientes sistemas:

63. $\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 2 \\ 5x - 4y = 40 \end{array} \right\}$

Se aplica el método de reducción.
 Se multiplica la primera ecuación por 2 y se suman.
 $x = 4, y = -5$

64. $\left. \begin{array}{l} x = 16 - y \\ x = y - 2 \end{array} \right\}$

Se aplica el método de igualación.
 Se igualan los valores de x
 $x = 7, y = 9$

65. $\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 12 \\ 3x - 2y = 5 \end{array} \right\}$

Se aplica el método de reducción.
 Se multiplica la primera ecuación por 2, la segunda por 3 y se suman.
 $x = 3, y = 2$

66. $\left. \begin{array}{l} 3x - 5y = 4 \\ y = 7 - 2x \end{array} \right\}$

Se aplica el método de sustitución.
 Se sustituye y de la segunda ecuación y se sustituye en la primera.
 $x = 3, y = 1$

67. $\left. \begin{array}{l} x = y - 7 \\ x = 5 - 2y \end{array} \right\}$

Se aplica el método de igualación.
 Se igualan los valores de x
 $x = -3, y = 4$

68.
$$\begin{cases} 5x + 3y = 11 \\ 3x + 5y = 13 \end{cases}$$

Se aplica el método de reducción.
Se multiplica la primera ecuación por 5, la segunda por -3 y se suman.
 $x = 1, y = 2$

69.
$$\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$$

Se eliminan denominadores.
$$\begin{cases} 4x = 3y \\ 2x + 3y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$$

Se aplica el método de reducción. Se suman las ecuaciones.
 $x = 3/2, y = 2$

70.
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3 \\ 5x + 2y = 4x + 10 \end{cases}$$

Se eliminan denominadores y se simplifica.
$$\begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

Se aplica el método de reducción.
Se le resta a la primera ecuación la segunda.
 $x = 4, y = 3$

71.
$$\begin{cases} \frac{x + 2y}{5} = 3 \\ 2x + 5y - 8 = 4(y + 1) \end{cases}$$

Se eliminan los denominadores, paréntesis y se simplifica.
$$\begin{cases} x + 2y = 15 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$$

Se aplica el método de reducción.
Se multiplica por -2 la segunda ecuación y se suman.
 $x = 3, y = 6$

72.
$$\begin{cases} 0,25x + 0,5y = 2 \\ 0,75x - 0,5y = 5 \end{cases}$$

Se aplica el método de reducción. Se suman las ecuaciones
 $x = 7, y = 0,5$

73. Escribe un sistema que tenga la solución:

$x = 3, y = -1$

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

74. Calcula el valor de k para que $x = 2, y = 1$ sea solución del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ kx - y = 9 \end{cases}$$

$2 + 2 \cdot 1 = 2 + 2 = 4$
 $2k - 1 = 9 \Rightarrow k = 5$

75. Calcula dos números sabiendo que suman 92 y que su diferencia es 22

Primer número: x
Segundo número: y
$$\begin{cases} x + y = 92 \\ x - y = 22 \end{cases}$$

 $x = 57, y = 35$

76. Para una fiesta se compran refrescos a 0,85 € y bolsas de frutos secos a 1,25 €. Por cada refresco se compran tres bolsas de frutos secos y en total se pagan 230 €. ¿Cuántos refrescos y bolsas se han comprado?

N.º de refrescos: x
N.º de bolsas de frutos secos: y
$$\begin{cases} 0,85x + 1,25y = 230 \\ y = 3x \end{cases}$$

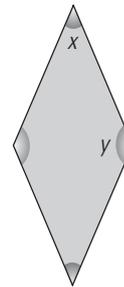
N.º de refrescos: $x = 50$
N.º de bolsas de frutos secos: $y = 150$

77. Halla dos números cuya suma sea 12 y el primero más el doble del segundo sea igual a 19

Primer número: x
Segundo número: y
$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x + 2y = 19 \end{cases}$$

 $x = 5, y = 7$

78. Un ángulo de un rombo mide el triple que el otro. ¿Cuánto mide cada ángulo?



Ángulo menor: x
Ángulo mayor: y
$$\begin{cases} y = 3x \\ x + y = 28 \end{cases}$$

 $x = 45^\circ, y = 135^\circ$

79. Halla la edad de un padre y la de su hijo sabiendo que la edad del padre es el triple de la del hijo y la diferencia de las edades es de 28 años.

Edad del hijo: x
Edad del padre: y
$$\begin{cases} y = 3x \\ y - x = 28 \end{cases}$$

Edad del hijo: $x = 14$ años.
Edad del padre: $y = 42$ años.

80. Halla los lados de un rectángulo sabiendo que el perímetro mide 130 m y que la base es $3/2$ de la altura.



Base: x
Altura: y
$$\begin{cases} 2x + 2y = 130 \\ x = 3y/2 \end{cases}$$

Base: $x = 39$ m
Altura: $y = 26$ m

- 81. Un pantalón y una camisa cuestan 60 € y he pagado por ellos 52,8 €. Si en el pantalón me han hecho el 10% de descuento y en la camisa, el 15%, ¿cuánto costaba cada prenda?**

Precio del pantalón: x
 Precio de la camisa: y

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 60 \\ 0,9x + 0,85y = 52,8 \end{array} \right\}$$

Coste del pantalón: $x = 36$ €
 Coste de la camisa: $y = 24$ €

- 82. Halla dos números cuya suma es 72 y son proporcionales a 5 y 3**

Primer número: x
 Segundo número: y

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 72 \\ \frac{x}{5} = \frac{y}{3} \end{array} \right\}$$

Primer número: $x = 45$
 Segundo número: $y = 27$

PROBLEMAS

- 83. Se mezcla café de calidad extra de 12 €/kg con café normal de 7 €/kg para obtener una mezcla de 40 kg a 9 €/kg. ¿Cuántos kilos hemos mezclado de cada clase?**

	Café extra	Café normal	Mezcla
Precio (€/kg)	12	7	9
Peso (kg)	x	y	40

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 40 \\ 12x + 7y = 40 \cdot 9 \end{array} \right\}$$

Café extra de 12 €/kg: $x = 16$ kg
 Café de 7 €/kg: $y = 24$ kg

- 84. Halla la ecuación de la recta $y = ax + b$ sabiendo que pasa por los puntos $A(1, 5)$ y $B(-1, 1)$**

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 5 \\ -a + b = 1 \end{array} \right\}$$

$a = 2, b = 3$
 La recta es: $y = 2x + 3$

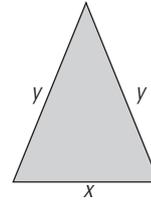
- 85. José ha comprado en el mercado 3 kg de manzanas y 2 kg de higos y ha pagado 14 € por toda la fruta. Sabiendo que el precio del kilo de higos es el doble que el de manzanas, halla el precio del kilo de manzanas y del kilo de higos.**

Precio del kilo de manzanas: x
 Precio del kilo de higos: y

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 14 \\ y = 2x \end{array} \right\}$$

Precio del kilo de manzanas: $x = 2$ €
 Precio del kilo de higos: $y = 4$ €

- 86. El perímetro de un triángulo isósceles mide 27,5 m y cada uno de los lados iguales mide 2,5 m más que el desigual. ¿Cuánto mide cada lado?**



Medida del lado desigual: x
 Medida de cada uno de los lados iguales: y

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 27,5 \\ y = x + 2,5 \end{array} \right\}$$

Medida del lado desigual: $x = 7,5$ m
 Medida de cada uno de los lados iguales: $y = 10$ m

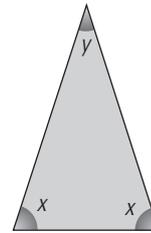
- 87. Por una camisa y un pantalón se han pagado 120 €, y por dos camisas y tres pantalones se han pagado 312 €. ¿Cuánto cuestan cada camisa y cada pantalón?**

Coste de una camisa: x
 Coste de un pantalón: y

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 120 \\ 2x + 3y = 312 \end{array} \right\}$$

Coste de una camisa: $x = 48$ €
 Coste de un pantalón: $y = 72$ €

- 88. El ángulo desigual de un triángulo isósceles mide la mitad de cada uno de los iguales. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos?**



Ángulo igual: x
 Cada ángulo desigual: y

$$\left. \begin{array}{l} y = x/2 \\ 2x + y = 180 \end{array} \right\}$$

Cada uno de los ángulos iguales: $x = 72^\circ$
 El ángulo desigual: $y = 36^\circ$

- 89. Pedro y María van a comprar cuadernos y bolígrafos. Pedro paga 30 € por 5 cuadernos y 6 bolígrafos, y María paga 34 € por 7 cuadernos y 2 bolígrafos. ¿Cuánto cuestan cada cuaderno y cada bolígrafo?**

Precio de un cuaderno: x
 Precio de un bolígrafo: y

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 6y = 30 \\ 7x + 2y = 34 \end{array} \right\}$$

Precio de un cuaderno: $x = 4,5$ €
 Precio de un bolígrafo: $y = 1,25$ €

- 90. Una fábrica hace bicicletas del tipo A, que llevan 1 kg de acero y 3 kg de aluminio, y otras del tipo B, que llevan 2 kg de acero y 2 kg de aluminio. Si la empresa tiene 240 kg de acero y 360 kg de aluminio, ¿cuántas bicicletas puede construir de cada modelo?**

Bicicletas del tipo A: x
 Bicicletas del tipo B: y

$$\begin{cases} x + 2y = 240 \\ 3x + 2y = 360 \end{cases}$$

Bicicletas del tipo A: $x = 60$
 Bicicletas del tipo B: $y = 90$

91. Se mezcla aceite puro de oliva de 3,5 € el litro con aceite de orujo de 2,5 € el litro, para obtener 400 litros de mezcla a 2,75 € el litro. ¿Cuántos litros hemos mezclado de cada aceite?

	Aceite puro	Aceite orujo	Mezcla
Precio (€/L)	3,5	2,5	2,75
Capacidad (L)	x	y	400

$$\begin{cases} x + y = 400 \\ 3,5x + 2,5y = 400 \cdot 2,75 \end{cases}$$

Aceite de oliva: $x = 100$ litros
 Aceite de orujo: $y = 300$ litros

92. Halla dos números sabiendo que al dividir el mayor entre el menor se obtiene de cociente 2 y de resto 3, y que la suma de los dos números es 39

Número menor: x
 Número mayor: y

$$\begin{cases} x + y = 39 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

Número menor: $x = 12$
 Número mayor: $y = 27$

93. Entre conejos y gallinas hay 48 animales en un corral. Sabiendo que en total hay 86 patas, ¿cuántos conejos y gallinas hay? Interpreta el resultado.

Cantidad de conejos: x
 Cantidad de gallinas: y

$$\begin{cases} x + y = 48 \\ 4x + 2y = 86 \end{cases}$$

Cantidad de conejos: $x = -5$
 Cantidad de gallinas: $y = 53$
 Interpretación: el número de conejos no puede ser negativo, por lo que el problema no tiene solución.

94. El triple de un número más otro número es igual a 29 y el doble del primero menos la mitad del segundo es igual a 10. ¿De qué números se trata?

Primer número: x
 Segundo número: y

$$\begin{cases} 3x + y = 29 \\ 2x - y/2 = 10 \end{cases}$$

$x = 7, y = 8$

95. Reparte 55 € proporcionalmente a 2 y 3

Primera cantidad: x
 Segunda cantidad: y

$$\begin{cases} x + y = 55 \\ \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \end{cases}$$

$x = 22, y = 33$

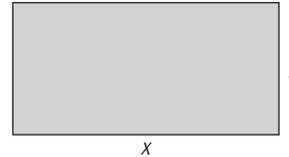
96. En una tienda, 2 pares de zapatos y 3 pares de deportivos cuestan 170 €, y se han pagado por ellos 132 €. Si en los zapatos han hecho el 25% de descuento y en los deportivos el 20%, ¿cuánto costaba cada par?

Pares de zapatos: x
 Pares de deportivos: y

$$\begin{cases} 2x + 3y = 170 \\ 2x \cdot 0,75 + 3y \cdot 0,8 = 132 \end{cases}$$

Pares de zapatos: $x = 40$
 Pares de deportivos: $y = 30$

97. El perímetro de un rectángulo mide 21 m y uno de los lados mide el doble del otro. ¿Cuánto mide cada lado?



Base: x
 Altura: y

$$\begin{cases} 2x + 2y = 21 \\ x = 2y \end{cases}$$

Base: $x = 7$ m
 Altura: $y = 3,5$ m

98. Dos revistas deportivas y una de automóviles cuestan 6 €. Cuatro revistas deportivas y dos de automóviles cuestan 12 €. Calcula cuánto cuesta cada revista deportiva y cada revista de automóviles. Interpreta el resultado que se obtiene.

Cantidad de revistas deportivas: x
 Cantidad de revistas de automóviles: y

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 4x + 2y = 12 \end{cases}$$

Los coeficientes de la segunda ecuación son el doble de los de la primera. El sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

PARA PROFUNDIZAR

99. Halla dos números tales que su suma sea 25 y la sexta parte del primero más cinco veces el segundo sea igual a 38

Primer número: x
 Segundo número: y

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ x/6 + 5y = 38 \end{cases}$$

$x = 18, y = 7$

100. Entre Juan y Antonio hacen un trabajo por el que cobran 654 €. Si Juan ha hecho los 2/3 del trabajo que ha hecho Antonio, ¿cuánto tiene que cobrar cada uno?

Cantidad que cobra Juan: x
 Cantidad que cobra Antonio: y

$$\begin{cases} x + y = 654 \\ x = 2y/3 \end{cases}$$

Juan cobra: $x = 261,6$ €
 Antonio cobra: $y = 392,4$ €

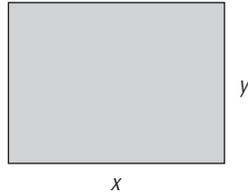
101. En un puesto se venden melones y sandías por unidades. Por la compra de 3 melones y 2 sandías se pagan 8 €, y por la compra de 6 melones y 4 sandías se pagan 15 €. Calcula el precio de cada melón y de cada sandía e interpreta el resultado que obtengas.

Precio de un melón: x
 Precio de una sandía: y

$$\left. \begin{aligned} 3x + 2y &= 8 \\ 6x + 4y &= 15 \end{aligned} \right\}$$

Los coeficientes de las incógnitas de la segunda ecuación son el doble que los de la primera y, sin embargo, el segundo miembro no es el doble. El sistema es incompatible, no tiene solución.

- 102. Calcula las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 306 m y cuya altura mide los 3/4 de la base.**



Base: x
 Altura: y

$$\left. \begin{aligned} 2x + 2y &= 306 \\ y &= 3x/4 \end{aligned} \right\}$$

Base: $x = 612/7 = 87,43$ m
 Altura: $y = 459/7 = 65,57$ m

- 103. Se mezcla cebada de 0,15 €/kg con trigo de 0,2 €/kg para obtener 500 kg de pienso para animales a 0,17 €/kg. ¿Cuántos kilos de cebada y de trigo hemos mezclado?**

	Cebada	Trigo	Mezcla
Precio (€/kg)	0,15	0,2	0,17
Masa (kg)	x	y	500

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 500 \\ 0,15x + 0,2y &= 500 \cdot 0,17 \end{aligned} \right\}$$

 Cebada: $x = 300$ kg
 Trigo: $y = 200$ kg

- 104. El perímetro de un rectángulo mide 24 m y la suma de dos lados contiguos mide 12 m. Calcula la longitud de los lados del rectángulo e interpreta el resultado que obtengas.**

Base: x
 Altura: y

$$\left. \begin{aligned} 2x + 2y &= 24 \\ x + y &= 12 \end{aligned} \right\}$$

El sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones, porque los coeficientes de la segunda ecuación son la mitad que los de la primera.

- 105. Halla dos números directamente proporcionales a 5 y 7 cuya suma sea 36**

Primer número: x
 Segundo número: y

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{5} &= \frac{y}{7} \\ x + y &= 36 \end{aligned} \right\}$$

 $x = 15, y = 21$

- 106. La suma de las edades de un padre y su hijo es de 75 años y la diferencia es de 45 años. ¿Qué edad tienen el padre y el hijo?**

Edad del padre: x
 Edad del hijo: y

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 75 \\ x - y &= 45 \end{aligned} \right\}$$

 Edad del padre: $x = 60$ años.
 Edad del hijo: $x = 15$ años.

- 107. Un número está compuesto de dos cifras que suman 6 unidades. Si cambiamos las dos cifras de orden, el número aumenta en 18 unidades. ¿De qué número se trata?**

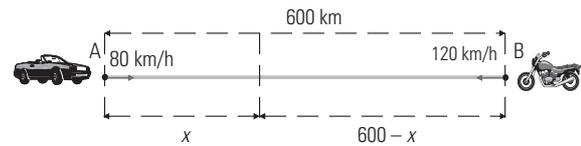
Cifra de las unidades: x
 Cifra de las decenas: y

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 6 \\ 10x + y &= x + 10y + 18 \end{aligned} \right\}$$

 $x = 4, y = 2$
 El número es 24

APLICA TUS COMPETENCIAS

- 108. Dos ciudades, A y B, distan entre sí 600 km. De la ciudad A sale hacia la ciudad B un coche a 80 km/h. Al mismo tiempo sale de la ciudad B hacia la ciudad A una moto a 120 km/h. Calcula el tiempo que tardarán en encontrarse y la distancia que ha recorrido cada vehículo.**

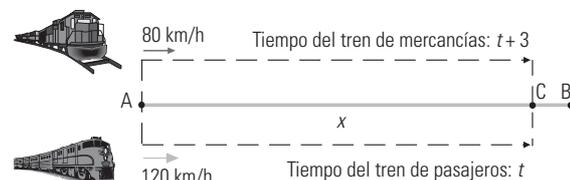


$$\left. \begin{aligned} x &= 80t \\ 600 - x &= 120t \end{aligned} \right\}$$

 $t = 3$ h, $x = 240$ km

El tiempo es el mismo para los dos: 3 h
 El espacio que recorre el coche que sale de A es de 240 km
 El espacio que recorre la moto que sale de B es de $600 - 240 = 360$ km

- 109. Dos ciudades, A y B, distan entre sí 800 km. De la ciudad A sale hacia la ciudad B un tren de mercancías a 80 km/h. Tres horas más tarde sale de la misma estación A otro tren de pasajeros a 120 km/h. Calcula el tiempo que tardará el segundo tren en alcanzar al primero y la distancia que han recorrido los dos trenes.**



$$\left. \begin{aligned} x &= 80(t + 3) \\ x &= 120t \end{aligned} \right\}$$

 $t = 6$ h, $x = 720$ km

COMPRUEBA LO QUE SABES

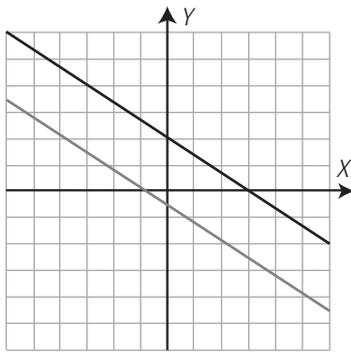
1. Clasifica un sistema a partir del número de soluciones y pon un ejemplo de un sistema incompatible.

Un sistema lineal se puede clasificar, según el número de soluciones en:

- a) **Compatible determinado:** el sistema **tiene una solución** y las dos rectas se cortan en un punto.
- b) **Incompatible:** el sistema **no tiene solución** y las dos rectas son paralelas.
- c) **Compatible indeterminado:** el sistema **tiene infinitas soluciones** y las dos rectas son la misma.

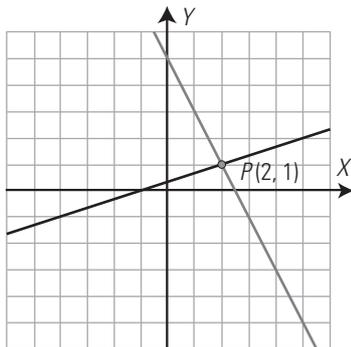
Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 6y = -3 \end{cases}$$



2. Resuelve gráficamente el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$$



$x = 2, y = 1$

3. Resuelve por el método más sencillo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y = -3x \\ 2x - 3y = 11 \end{cases}$$

Se resuelve por sustitución. Se sustituye el valor de y en la segunda ecuación.

$x = 1, y = -3$

4. Resuelve por el método más sencillo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y = 2 - 2x \\ 3x - y = -7 \end{cases}$$

Se resuelve por sustitución.

Se sustituye el valor de y en la segunda ecuación.

$x = -1, y = 4$

5. Resuelve por el método más sencillo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - 6y = 4 \end{cases}$$

Se resuelve por reducción. Se multiplica la primera por 2 y se suman.

$x = 2, y = 1$

6. Resuelve por el método más sencillo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x = 2y - 1 \\ x = 3y - 6 \end{cases}$$

Se resuelve por igualación.

$x = 9, y = 5$

7. Ana tiene el triple de dinero que Julio y entre los dos tienen 800 €. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Dinero que tiene Ana: x
Dinero que tiene Julio: y

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 800 \end{cases}$$

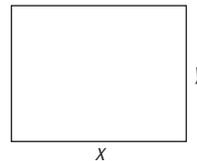
Se resuelve por sustitución.

$x = 600, y = 200$

Ana tiene: 600 €

Julio tiene: 200 €

8. Un prado tiene forma rectangular. La altura del rectángulo mide 5 m menos que la base, y el perímetro mide 82 m. Halla el área del prado.



Base: x

Altura: y

$$\begin{cases} y = x - 5 \\ 2x + 2y = 82 \end{cases}$$

Base: $x = 23$ m, altura: $y = 18$ m

Área = $23 \cdot 18 = 414 \text{ m}^2$

WINDOWS/LINUX 

PASO A PASO

110. Resuelve gráficamente el siguiente sistema, clasifícalo y, si es compatible determinado, halla la solución.

$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$$

Resuelto en el libro del alumnado.

111. Resuelve algebraicamente el siguiente sistema y clasifícalo a la vista del resultado:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

Resuelto en el libro del alumnado.

112. Resuelve algebraicamente el siguiente sistema y clasifícalo a la vista del resultado:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 6y = -3 \end{cases}$$

Resuelto en el libro del alumnado.

113. Resuelve algebraicamente el siguiente sistema y clasifícalo a la vista del resultado:

$$\begin{cases} 3x - y = -1 \\ -9x + 3y = 3 \end{cases}$$

Resuelto en el libro del alumnado.

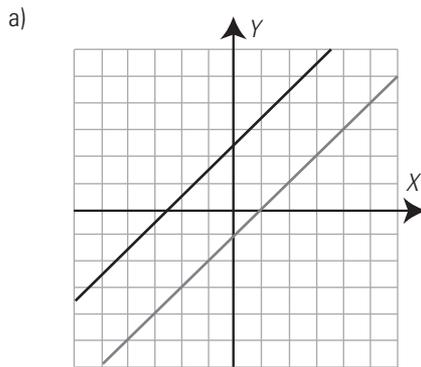
114. En un rectángulo, la suma de las longitudes de la base y de la altura es 35 m, y la longitud de la base menos la longitud de la altura es 7 m. ¿Cuánto mide cada lado?

Resuelto en el libro del alumnado.

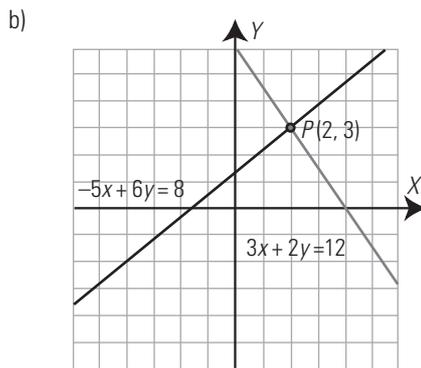
PRACTICA

115. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas, clasifícalos y, si es compatible determinado, halla la solución.

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ -2x + 2y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ -5x + 6y = 8 \end{cases}$



Sistema incompatible.



Sistema compatible determinado.
 $x = 2, y = 3$

116. Resuelve algebraicamente los siguientes sistemas y clasifícalos a la vista del resultado:

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 6y = 3 \\ -2x + 3y = 5 \end{cases}$

- a) $x = 3, y = 1$
Sistema compatible determinado.
- b) No tiene solución.
Sistema incompatible.

117. Resuelve algebraicamente los siguientes sistemas y clasifícalos a la vista del resultado:

a) $\begin{cases} 9x - 6y = 12 \\ -3x + 2y = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + y = 15 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$

- a) $3x - 2y = 4$
Sistema compatible indeterminado.
- b) $x = 2, y = 5$
Sistema compatible determinado.

118. Resuelve algebraicamente los siguientes sistemas y clasifícalos a la vista del resultado:

a) $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{4} \\ \frac{5x}{2} - \frac{7y}{6} = \frac{1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0,5x + y = 1 \\ 0,25x - y = -0,25 \end{cases}$

- a) $x = 3, y = 6$
Sistema compatible determinado.
- b) $x = 1, y = 0,5$
Sistema compatible determinado.

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de Wiris:

119. Ana tiene el triple de dinero que Julio y entre los dos tienen 800 €. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Planteamiento:
 $\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 800 \end{cases}$
Solución:
Ana tiene: 600 €
Julio tiene: 200 €

120. En un rectángulo, el perímetro mide 21 m y la base es el doble que la altura. ¿Cuánto mide cada lado?

Planteamiento:
 $\begin{cases} 2x + 2y = 21 \\ y = 2x \end{cases}$
Solución:
La base mide 7 m
La altura mide 3,5 m

121. En una tienda de informática el precio de un ordenador más el de una impresora es de 800 €. Si hacen un descuento en el ordenador del 10% y en la impresora del 15%, el valor es de 710 €. ¿Cuánto costaba el ordenador y la impresora?

Planteamiento:
 $\begin{cases} x + y = 800 \\ 0,9x + 0,85y = 710 \end{cases}$
Solución:
El ordenador cuesta 600 €
La impresora cuesta 200 €

122. Halla dos números que sean proporcionales a 2 y 3 y cuya suma sea 60

Planteamiento: Solución:
 $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ x + y = 60 \end{cases}$ $x = 24, y = 36$

123. En un corral hay 110 animales entre gallinas y conejos. El número de patas que hay en total es 320. ¿Cuántas gallinas y conejos hay?

Planteamiento: Solución:
 $\begin{cases} x + y = 110 \\ 2x + 4y = 320 \end{cases}$ Número de gallinas: 60
Número de conejos: 50

Evaluación de diagnóstico

BLOQUE II: ÁLGEBRA

Resuelve los siguientes ejercicios:

1. Halla el valor numérico del polinomio:

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 3 \text{ para } x = -1$$

$$P(-1) = 2$$

2. Señala en tu cuaderno la igualdad verdadera:

a) $\frac{5 + 10x}{5} = 10x$

b) $(a - b)^2 = a^2 - b^2$

c) $4 + 8z = 4(1 + 2z)$

d) $\sqrt{a^2 + 9} = a + 3$

c)

3. Dados los polinomios:

$$P(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 2$$

$$Q(x) = -x^4 + 5x^2 + 3x - 5$$

calcula $P(x) - Q(x)$

$$P(x) - Q(x) = 4x^2 - 2x^3 - 6x^2 - 3x + 7$$

4. Dados los polinomios:

$$P(x) = 6x^4 - 11x^3 + 16x^2 - 3x - 4$$

$$Q(x) = 3x^2 - x - 1$$

calcula $P(x) : Q(x)$

$$C(x) = 2x^2 - 3x + 5$$

$$R(x) = -x + 1$$

5. Calcula el valor de m para que el resto de la división:

$$(3x^4 - 6x^3 + mx^2 + 5) : (x - 2)$$

sea 9

Se aplica el teorema del resto:

$$P(2) = 3 \cdot 2^4 - 6 \cdot 2^3 + m \cdot 2^2 + 5 = 9$$

$$4m + 5 = 9$$

$$m = 1$$

6. Resuelve la ecuación:

$$\frac{x-1}{4} - x = \frac{x+1}{2} - \frac{x-2}{6}$$

$$x = -1$$

7. Señala en tu cuaderno el resultado de factorizar el polinomio siguiente:

$$3x^2 + 7x - 6$$

a) $(x + 3) \left(x - \frac{2}{3}\right)$

b) $(x + 9) (x - 2)$

c) $3(x + 3) \left(x - \frac{2}{3}\right)$

d) $\left(x - \frac{5}{6}\right) \left(x + \frac{2}{3}\right)$

c)

8. Resuelve el sistema por el método más sencillo:

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

Se resuelve por reducción, sumando las dos ecuaciones.

$$x = 1, y = 2$$

9. La madre de Laura y José ha pagado 122 € por un vestido y una sudadera, que ha regalado a sus hijos. José protesta porque con lo que cuesta el vestido se podrían haber comprado dos sudaderas y habrían sobrado 17 €. Traduce la situación al lenguaje algebraico mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, indicando con claridad el significado de las letras que empleas.

Calcula el precio del vestido y el de la sudadera.

Precio del vestido: x

Precio de la sudadera: y

$$\begin{cases} x + y = 122 \\ x = 2y + 17 \end{cases} \Rightarrow x = 87, y = 35$$

El precio del vestido es 87 € y el de la sudadera, 35 €.

10. Los jueves, Andrés distribuye las 24 horas del día de la siguiente forma: estudia la mitad de lo que duerme y todavía le sobran 10 horas para el resto de sus actividades.

Plantea una ecuación que exprese el enunciado, indicando claramente lo que significa la incógnita.

¿Cuánto tiempo estudia Andrés los jueves? Exprésalo en horas y minutos.

N.º de horas de estudio = x

$$x + 2x + 10 = 24 \Rightarrow x = 14/3$$

Estudia $14/3$ h = $4 + 2/3$ h = 4 h 40 min

11. Una ONG va a repartir paquetes de leche a las familias necesitadas de un barrio. Si la ONG tuviese el doble de paquetes de leche, podría repartir 6 paquetes a cada familia. Si tuviese el triple de paquetes y el número de familias fuese uno menos, repartirían 10 paquetes a cada familia.

Calcula el número de familias necesitadas del barrio y el número de paquetes de leche que tiene la ONG.

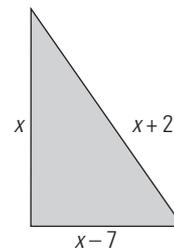
N.º de familias = x

N.º de paquetes de leche = y

$$\begin{cases} 2y = 6x \\ 3y = 10(x - 1) \end{cases} \Rightarrow x = 10, y = 30$$

Hay 10 familias y a cada una le tocan 30 paquetes de leche.

12. En un triángulo rectángulo el cateto menor mide 7 cm menos que el cateto mayor; y la hipotenusa mide 2 cm más que el cateto mayor. Calcula las dimensiones del triángulo.



$$x^2 + (x^2 - 7)^2 = (x + 2)^2$$

$$x^2 - 18x + 45 = 0$$

$$x_1 = 3 \text{ (no es válida)}$$

$$x_2 = 15$$

Las dimensiones son:

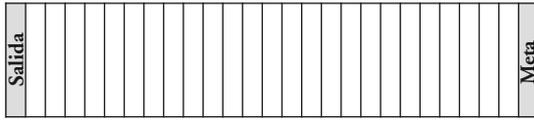
Cateto mayor = 15 cm

Cateto menor = 8 cm

Hipotenusa = 17 cm

13. Juego de mesa.

Estoy jugando con mi amiga Luisa a un juego en un tablero como el siguiente:



Se utiliza un dado por jugador y varias tarjetas. En cada turno tiramos un dado y sacamos una tarjeta del montón. Hay que mover la ficha tanto como indiquen los cálculos de la tarjeta. Si el número que nos indica la tarjeta es negativo, se retrocede la cantidad indicada. Estos son dos ejemplos de tarjetas.

<p>TARJETA 1</p> <p>Avanza una casilla menos que la mitad del número que indique tu dado.</p>	<p>TARJETA 2</p> <p>Avanza dos casillas más que el número que indique tu dado.</p>
--	---

Si queremos abreviar lo que indican las tarjetas, llamamos D a lo que indique el dado y llamamos A a lo que tenemos que avanzar la ficha. La fórmula sería:

TARJETA 1: $A = \frac{D}{2} - 1$ TARJETA 2: $A = D + 2$

Pregunta 1.

¿Cuál es la fórmula que corresponde a la tarjeta 3 cuyo texto es el siguiente?

Avanza la ficha dos casillas más que el doble de lo que indica tu dado.

Pregunta 2.

La fórmula que tiene mi amiga Julia para la tarjeta 4 es: $A = 2 \cdot D - 4$

Escribe un enunciado que se corresponda con esta fórmula de la tarjeta 4

Pregunta 3.

En el inicio de la partida yo he sacado:

- Un cinco en el dado en mi primer lanzamiento y he sacado la tarjeta 2: $A = D + 2$

- Un dos en el dado en mi segundo lanzamiento y he sacado la tarjeta 4: $A = 2 \cdot D - 4$

Por su parte, Julia ha sacado:

- Un seis en el dado en el primer lanzamiento y ha sacado la tarjeta 1: $A = \frac{D}{2} - 1$

- Un dos en el dado en el segundo lanzamiento y ha sacado la tarjeta 5: $A = D + 3$

En este momento de la partida, ¿quién va delante?, ¿cuántas casillas ha avanzado Julia y cuántas he avanzado yo?

Pregunta 4.

Inventa el texto de una tarjeta 6 que:

- Transforma el 2 del dado en un avance de 7 casillas.
- La misma tarjeta también transforma el 5 del dado en un avance de 13 casillas. Di también cuál sería su fórmula.

1. $A = 2D + 2$

- 2. Avanza cuatro casillas menos que el doble de lo que indica el dado.

3. $D = 5$ y tarjeta 2: $A = D + 2 \Rightarrow A = 5 + 2 = 7$
 $D = 2$ y tarjeta 4: $A = 2 \cdot D - 4 \Rightarrow A = 2 \cdot 2 - 4 = 0$
 Estoy en la casilla 7

Julia:

$D = 6$ y tarjeta 1: $A = D/2 - 1 \Rightarrow A = 6/2 - 1 = 3 - 1 = 2$

$D = 2$ y tarjeta 5: $A = D + 3 \Rightarrow A = 2 + 3 = 5$

Julia está en la casilla 7

Están en la misma casilla.

- 4. Sea la instrucción $A = xD + y$

$$\left. \begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ 5x + y &= 13 \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo por reducción, restando la segunda ecuación menos la primera, se tiene:

$x = 2, y = 3$

El texto será:

Tarjeta 6: avanza tres casillas más que el doble del número del dado.

Tarjeta 6: $A = 2D + 3$

SOLUCIONARIO BLOQUE III.
FUNCIONES Y GRÁFICAS

8. Características globales de las funciones

1. FUNCIONES

PIENSA Y CALCULA

Considera los rectángulos con un lado de doble longitud que el otro. Expresa el perímetro y el área en función del lado menor.



$$P = 2(x + 2x) = 6x \quad A = 2x \cdot x = 2x^2$$

CARNÉ CALCULISTA

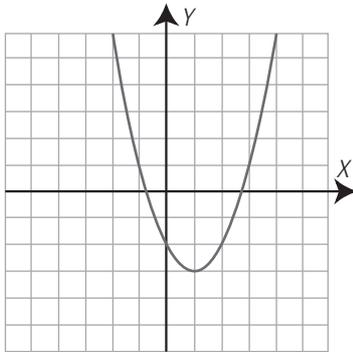
Desarrolla: $\left(\frac{x}{3} + 3\right)^2 = \frac{x^2}{9} + 2x + 9$

Factoriza: $9x^2 - 49 = (3x + 7)(3x - 7)$

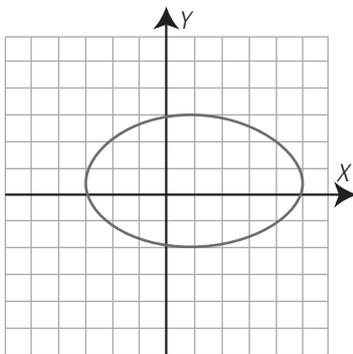
APLICA LA TEORÍA

1. Dibuja una gráfica que sea función y otra que no.

Esta gráfica es una función.



Esta gráfica no es una función.



2. En la representación gráfica de una función, la suma de la abscisa y de la ordenada de cada punto es 5

a) Escribe la ecuación que relaciona la ordenada, y , en función de la abscisa, x

b) ¿De qué grado es la función polinómica que se obtiene?

a) $x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - x$

b) Es un polinomio de grado uno.

3. Un rectángulo tiene 12 m de perímetro.

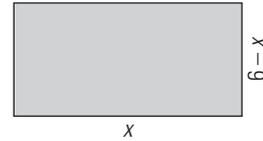
a) Escribe el área del rectángulo, y , en función de la longitud de la base, x

b) ¿De qué grado es la función polinómica que se obtiene?

c) Haz una tabla de valores.

d) Halla el dominio.

e) Halla la imagen o recorrido.



a) $y = x(6 - x) = 6x - x^2$

b) Es un polinomio de grado dos.

c) Tabla:

Base: x	0	1	2	3	4	5	6
Área: y	0	5	8	9	8	5	0

d) Dominio: $0 \leq x \leq 6$

e) Imagen o recorrido: $0 \leq x \leq 9$

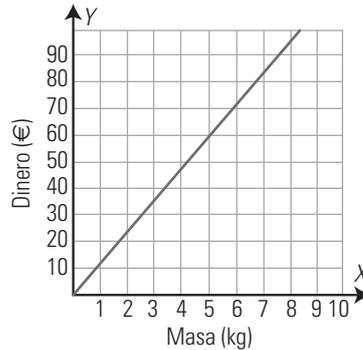
Cada una de las siguientes funciones está expresada de una de las cuatro formas. Halla, en cada una de ellas, la expresión de las otras tres formas:

4. El precio de un jamón es de 12 €/kg

a) Tabla:

Masa (kg): x	1	2	3	4	5	...
Dinero (€): y	12	24	36	48	60	...

b) Gráfica:



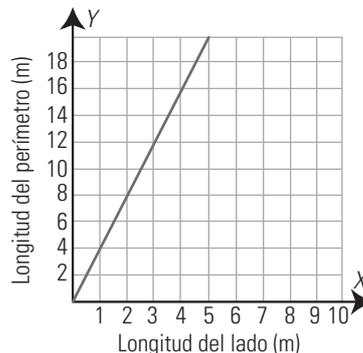
c) Fórmula: $y = 12x$

5.

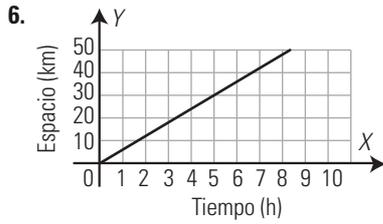
Lado (m): x	1	2	3	...
Perímetro (m): y	4	8	12	...

a) Enunciado: el perímetro de un cuadrado de lado x

b) Gráfica:



c) Fórmula: $y = 4x$



- a) Enunciado: espacio que recorre una persona que va a una velocidad de 6 km/h
 b) Tabla:

Tiempo (h): t	1	2	3	4	5	...
Longitud (km): e	6	12	18	24	30	...

c) Fórmula: $e = 6t$

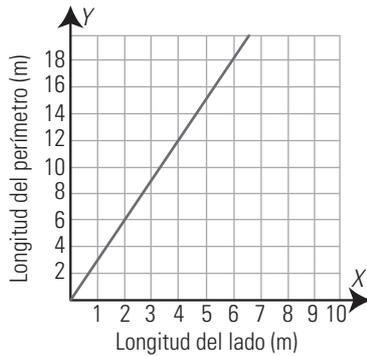
7. $y = 3x$

Es una solución abierta, por ejemplo:

- a) Enunciado: perímetro de un triángulo equilátero en función del lado.
 b) Tabla:

Lado (m): x	1	2	3	...
Perímetro (m): y	3	6	9	...

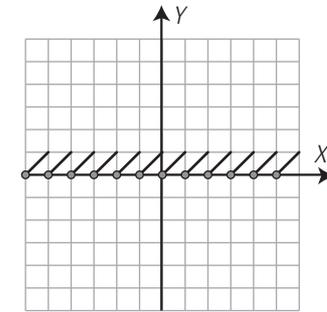
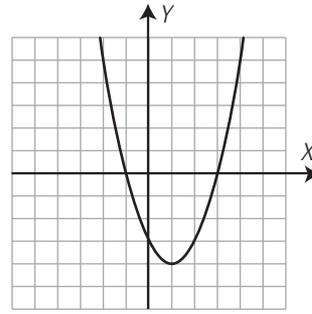
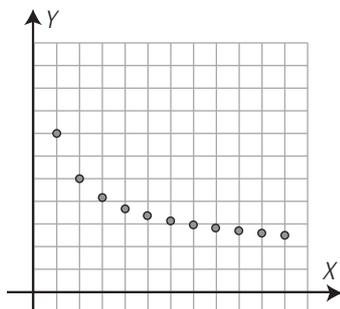
c) Gráfica:



2. CONTINUIDAD, ASÍNTOTAS Y PERIODICIDAD

PIENSA Y CALCULA

Observa las gráficas y contesta a las siguientes preguntas:



- a) ¿Qué gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel?
 b) ¿En alguna de las gráficas se repite algún trozo?

a) La segunda. b) La tercera.

CARNÉ CALCULISTA

Resuelve la ecuación:

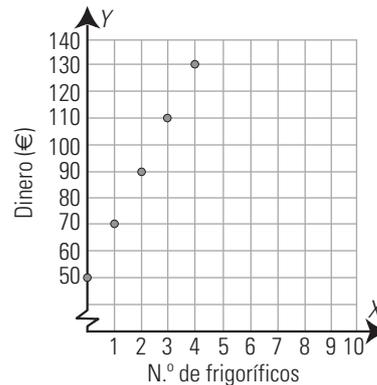
$$\frac{7x+2}{4} - \frac{3x-5}{3} = x + \frac{5}{2}$$

$$x = -4/3$$

APLICA LA TEORÍA

8. Un dependiente de una tienda gana 50 € por cada día que va a trabajar, más 20 € por cada frigorífico que vende.

- a) Expresa el salario del vendedor durante un día en función de los frigoríficos que vende.
 b) Esboza la gráfica de la función.
 c) ¿Es continua? ¿Por qué?
- a) $y = 50 + 20x$
 b) Gráfica:

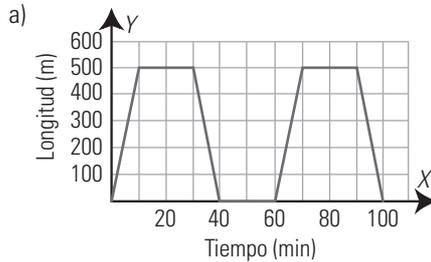


c) No es continua. Los valores de x son discretos.

9. Un funicular emplea 10 minutos en subir desde la base de una montaña a la cima, que se encuentra a 500 m. Espera 20 minutos y vuelve a bajar en otros 10 minutos. En la base espera 20 minutos y comienza de nuevo el recorrido.

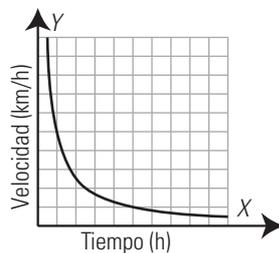
a) Representa la función que expresa la altura a la que se encuentra el funicular en función del tiempo.

b) Analiza si la función es continua y periódica.



b) Es una función continua y periódica.

10. La siguiente gráfica recoge la velocidad ($v = e/t$) de una persona que recorre 5 km. Indica las asíntotas de la gráfica y explica su significado.

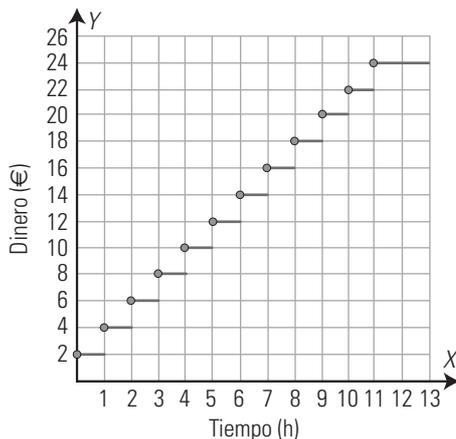


Asíntota horizontal: $y = 0$

Si recorre los 5 km en mucho tiempo, la velocidad debe ser muy baja. Al aumentar mucho el tiempo, la velocidad se aproximará a cero. Asíntota vertical: $x = 0$

Si recorre los 5 km en poco tiempo, la velocidad debe ser muy alta. Al disminuir mucho el tiempo y aproximarse a cero, la velocidad tenderá a ser muy alta.

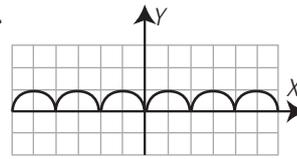
11. En un aparcamiento público se cobran 2 € por cada hora o fracción, con un máximo de 24 € por un día. Representa la función que expresa el coste por aparcar un coche en función del tiempo durante un día y analiza si es continua.



No es continua. Cada hora se da un salto de 2 € hasta llegar a 11 h. A partir de 11 h se cobra el máximo, que es 24 €

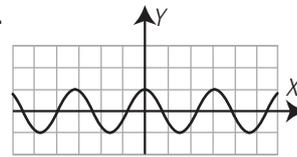
Analiza si las siguientes gráficas son periódicas, y en caso afirmativo calcula el período:

12.



Es periódica de período 2

13.



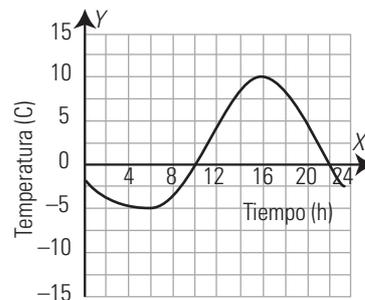
Es periódica de período π

3. CRECIMIENTO Y PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

PIENSA Y CALCULA

La gráfica adjunta recoge la evolución de la temperatura en una ciudad durante las 24 horas de un día.

- ¿En qué momento del día se alcanzó la temperatura máxima?
- ¿A qué hora se alcanzó la temperatura mínima?
- ¿En qué intervalos del día aumenta la temperatura? ¿En cuáles disminuye?
- ¿En qué momentos se hace cero la temperatura?



- A las 4 de la tarde.
- A las 6 de la mañana.
- Aumenta desde las 6 de la mañana hasta las 4 de la tarde. Disminuye desde las 0 horas hasta las 6 de la mañana y desde las 4 de la tarde hasta las 12 de la noche.
- A las 10 de la mañana y a las 10 de la noche.

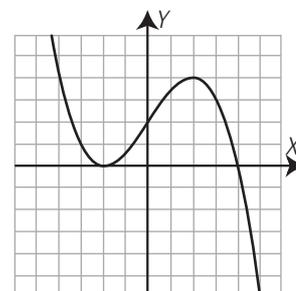
CARNÉ CALCULISTA

Resuelve la ecuación: $x^2 - \frac{13x}{6} - \frac{5}{2} = 0$

$x_1 = 3; x_2 = -5/6$

APLICA LA TEORÍA

14. Analiza la gráfica siguiente y contesta:

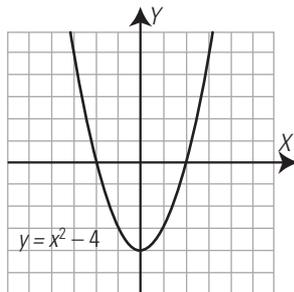


- a) ¿Dónde es creciente? ¿Dónde es decreciente?
- b) ¿En qué punto alcanza el máximo y el mínimo?
- c) ¿Dónde es convexa (∪) y cóncava (∩)?
- d) Halla los puntos de corte con los ejes.

- a) Creciente: entre -2 y 2
Decreciente: a la izquierda de -2 y a la derecha de 2
- b) Máximo: $A(2, 4)$
Mínimo: $B(-2, 0)$
- c) Convexa (∪): a la izquierda de cero.
Cóncava (∩): a la derecha de cero.
- d) Eje X: $B(-2, 0), C(4, 0)$
Eje Y: $D(0, 2)$

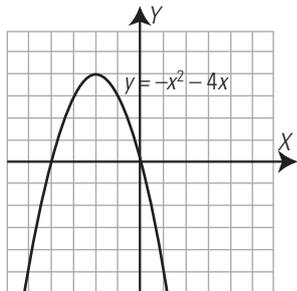
Halla los puntos de corte con los ejes X e Y:

15.



Eje X: $A(-2, 0), B(2, 0)$ Eje Y: $C(0, -4)$

16.



Eje X: $A(-4, 0), O(0, 0)$ Eje Y: $O(0, 0)$

Calcula los puntos de corte con los ejes X e Y:

17. $y = 2x - 1$

Eje X: $A(1/2, 0)$ Eje Y: $B(0, -1)$

18. $y = x^2 - 3x$

Eje X: $A(3, 0), O(0, 0)$ Eje Y: $O(0, 0)$

19. $y = x^2 - 16$

Eje X: $A(-4, 0), B(4, 0)$ Eje Y: $C(0, -16)$

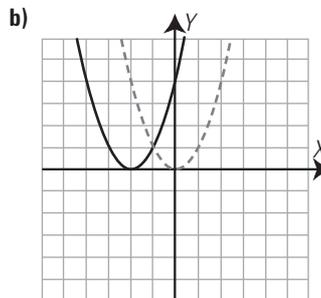
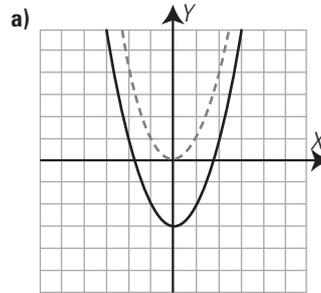
20. $y = x^2 + 2x - 15$

Eje X: $A(-5, 0), B(3, 0)$ Eje Y: $C(0, -15)$

4. TRASLACIONES. SIMETRÍAS. INTERPRETACIÓN CONJUNTA DE GRÁFICAS

PIENSA Y CALCULA

¿Qué movimiento debes hacer, en cada caso, con la gráfica roja para que coincida con la gráfica azul?



- a) Trasladarla verticalmente 3 unidades hacia abajo.
- b) Trasladarla horizontalmente 2 unidades hacia la izquierda.

CARNÉ CALCULISTA

Resuelve el sistema por el método más sencillo:

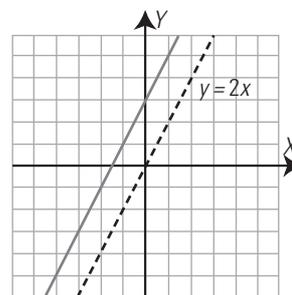
$$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 4x + y = 10 \end{cases}$$

$x = 3, y = -2$

APLICA LA TEORÍA

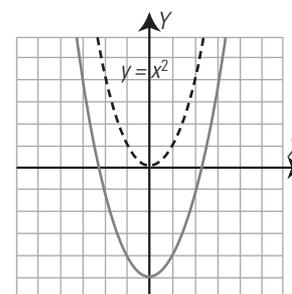
Escribe, en cada caso, la ecuación de la gráfica azul, que es una traslación vertical de la gráfica roja. ¿Cuáles son simétricas respecto del eje Y?

21.



$y = 2x + 3$

22.

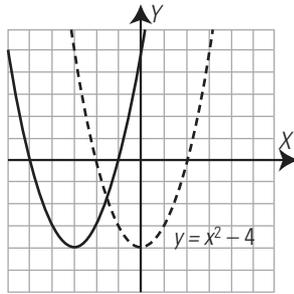


$y = x^2 - 5$

Las dos parábolas son simétricas respecto del eje Y

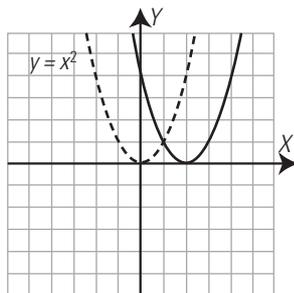
Escribe, en cada caso, la ecuación de la gráfica azul, que es una traslación horizontal de la gráfica roja:

23.



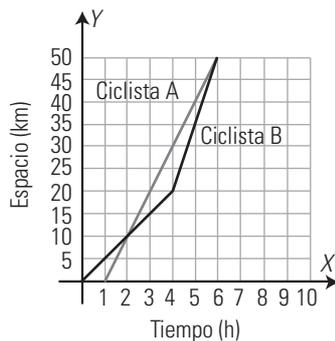
$y = (x + 3)^2 - 4$

24.



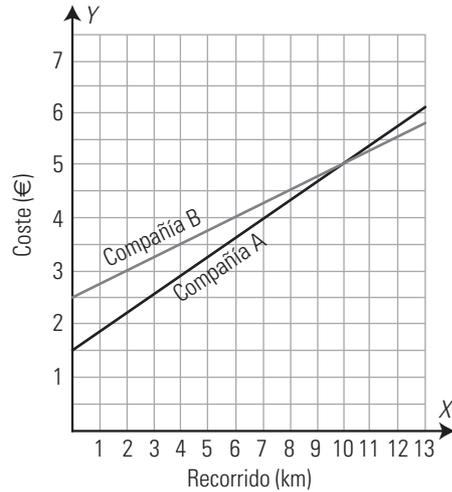
$y = (x - 2)^2$

25. Las gráficas siguientes recogen el recorrido de dos ciclistas. Analízalas y contesta: ¿Qué distancia recorren? ¿Salen a la vez? ¿Qué ciclista ha ido más rápido? ¿Se encuentran en algún momento?



- a) Distancia: 50 km
- b) No. El ciclista A sale una hora después que el B.
- c) El ciclista A.
- d) A los 10 km de la salida y en la meta.

26. En una pequeña isla hay dos compañías de taxi. La compañía A cobra 1,5 € por bajada de bandera y 0,35 € por cada kilómetro recorrido. La compañía B cobra 2,5 € por bajada de bandera y 0,25 € por kilómetro recorrido. Representa las gráficas de las funciones del coste de un viaje en función de los kilómetros recorridos para cada compañía, y deduce qué compañía es más económica para hacer un viaje.



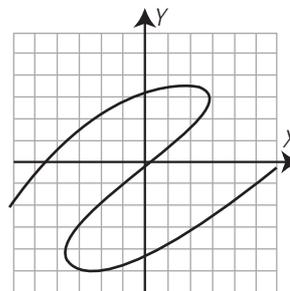
Para hacer un recorrido menor de 10 km, la compañía A es más económica. Para hacer un recorrido de más de 10 km, la compañía B es más barata.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. FUNCIONES

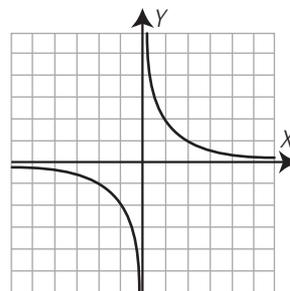
Indica cuál de las siguientes gráficas es una función:

27.



No es función.

28.

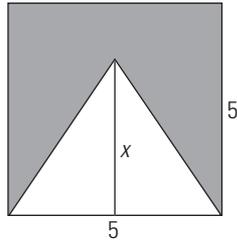


Sí es función.

29. En la representación gráfica de una función, cada ordenada, y , disminuida en 3 unidades, es igual al doble de la abscisa.

- a) Escribe la ecuación que relaciona la ordenada, y , en función de la abscisa, x
- b) ¿De qué grado es la función polinómica que se obtiene?
 - a) $y - 3 = 2x \Rightarrow y = 2x + 3$
 - b) Es de grado uno o primer grado.

30. Dado el siguiente dibujo:



- a) Escribe el área de la superficie azul, y , en función de la altura del triángulo, x
- b) ¿De qué grado es la función polinómica que se obtiene?
- c) Halla el dominio.
- d) Halla la imagen o recorrido.

- a) $y = 25 - 2,5x$
- b) De grado uno o primer grado.
- c) Dominio: $0 \leq x \leq 5$
- d) Imagen o recorrido: $12,5 \leq y \leq 25$

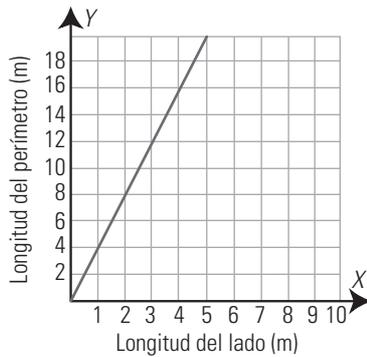
Cada una de las siguientes funciones está expresada de una de las cuatro formas. Halla, en cada una de ellas, la expresión de las otras tres formas:

31. El perímetro de un rombo en función de la medida del lado.

a) Tabla:

Longitud del lado (m): x	1	2	3	...
Longitud del perímetro (m): y	4	8	12	...

b) Gráfica:

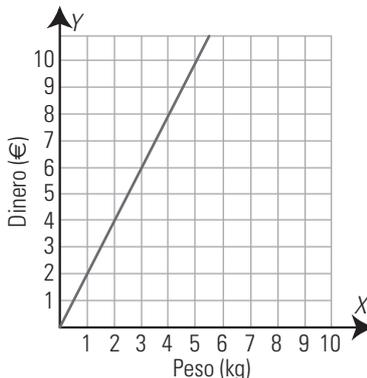


c) Fórmula: $y = 4x$

32. Tabla:

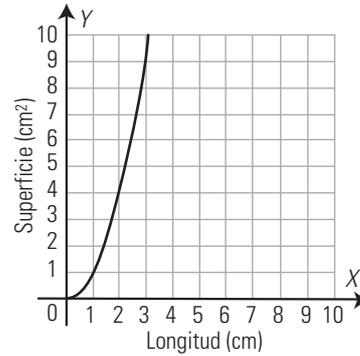
Masa (kg): x	1	2	3	...
Dinero (€): y	2	4	6	...

- a) Enunciado: el precio de un kilo de melocotones es de 2 €
- b) Gráfica:



c) Fórmula: $y = 2x$

33. Gráfica:



- a) Enunciado: área de un cuadrado en función del lado.
- b) Tabla:

Longitud del lado (cm): x	1	2	3	4	...
Área (cm²): y	1	4	9	16	...

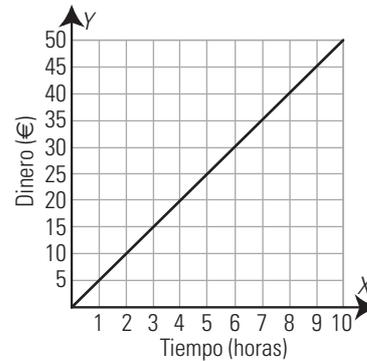
c) Fórmula: $y = x^2$

34. Fórmula: $y = 5x$

- a) Enunciado: un trabajador cobra 5 € por cada hora trabajada.
- b) Tabla:

Tiempo (h): x	1	2	3	...
Dinero (€): y	5	10	15	...

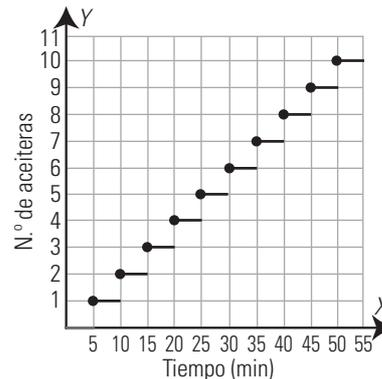
c) Gráfica:



2. CONTINUIDAD, ASÍNTOTAS Y PERIODICIDAD

35. Un artesano hace una aceitera de vidrio en 5 minutos. Expresa el número de aceiteras que hace el artesano en función del tiempo, esboza la gráfica de la función y analiza si es continua.

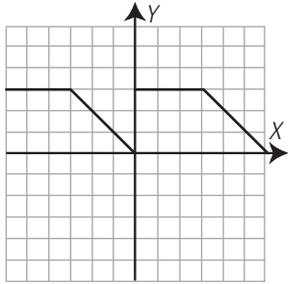
$$y = \frac{x}{5}$$



No es continua. Hay un salto cada 5 minutos que acaba una aceitera.

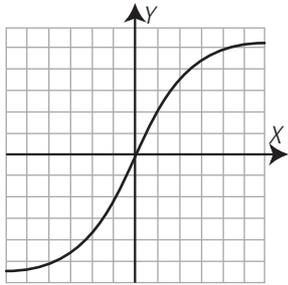
Indica cuál de las siguientes gráficas es continua y cuál no:

36.



No es continua. Tiene un salto en $x = 0$ de 3 unidades.

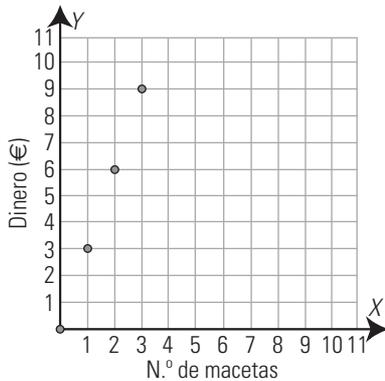
37.



Es continua.

38. En una floristería cobran 3 € por cada maceta que venden. Escribe la fórmula que expresa el dinero cobrado en función de las macetas vendidas. Representa y analiza si es continua.

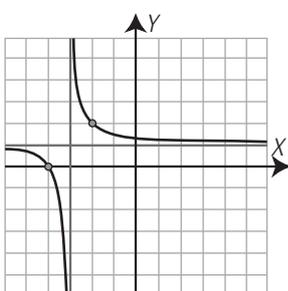
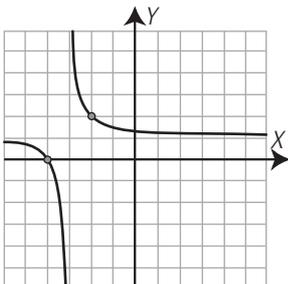
$$y = 3x$$



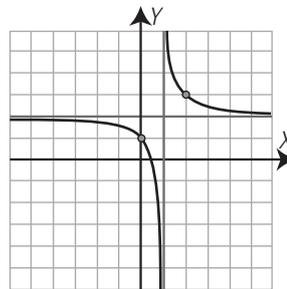
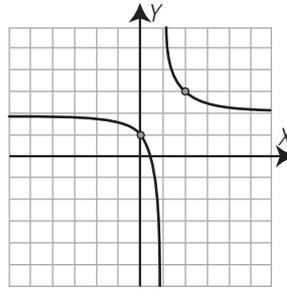
Es discontinua porque la variable x es discreta.

Copia y dibuja las asíntotas de las siguientes gráficas:

39.

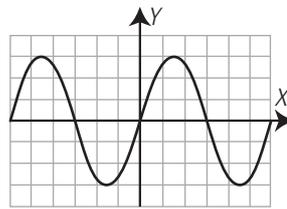


40.



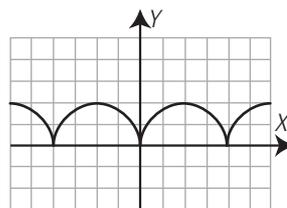
Analiza si las siguientes gráficas son periódicas y, en caso afirmativo, calcula el período:

41.



Sí es periódica. Su período es 6

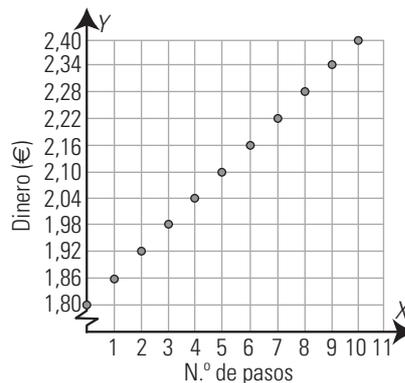
42.



Sí es periódica. Su período es 4

43. Un taxi cobra 1,8 € por bajada de bandera y 0,06 € por cada paso del taxímetro. Expresa el precio de un viaje en taxi en función de los pasos del taxímetro. ¿Es continua la gráfica de la función?

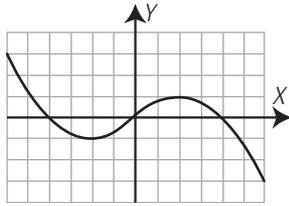
$$y = 1,8 + 0,06x$$



Es discontinua. En cada paso de taxímetro hay un salto de 0,06 €

3. CRECIMIENTO Y PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

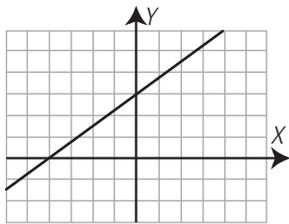
44. Analiza la gráfica siguiente y contesta:



- a) ¿Dónde es creciente? ¿Dónde es decreciente?
 - b) ¿En qué punto alcanza el máximo? ¿En cuál el mínimo?
 - c) ¿Dónde es convexa (∪) y cóncava (∩)?
- a) Creciente: entre -2 y 2
 Decreciente: a la izquierda de -2 y a la derecha de 2
- b) Máximo: $A(2, 1)$
 Mínimo: $B(-2, -1)$
- c) Convexa (∪): a la izquierda de cero.
 Cóncava (∩): a la derecha de cero.

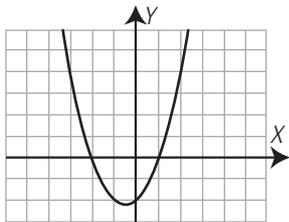
Observando las gráficas, señala los puntos de corte con el eje X y con el eje Y:

45.



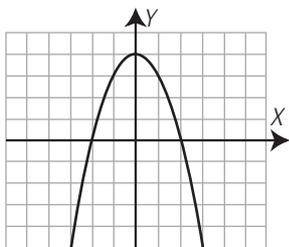
Eje X: $A(-4, 0)$ Eje Y: $B(0, 3)$

46.



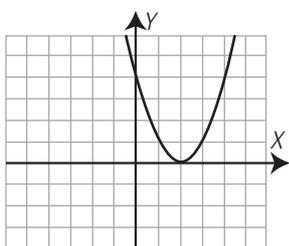
Eje X: $A(-2, 0), B(3, 0)$ Eje Y: $C(0, -2)$

47.



Eje X: $A(-2, 0), B(2, 0)$ Eje Y: $C(0, 4)$

48.



Eje X: $A(2, 0)$ Eje Y: $B(0, 4)$

Halla los puntos de corte con el eje X y con el eje Y:

49. $y = -2x + 4$

Eje X: $A(2, 0)$
 Eje Y: $B(0, 4)$

50. $y = 2x^2 - 6x$

Eje X: $O(0, 0), B(3, 0)$
 Eje Y: $C(0, 0)$

51. $y = x^2 - 25$

Eje X: $A(-5, 0), B(5, 0)$
 Eje Y: $C(0, -25)$

52. $y = x^2 - x - 12$

Eje X: $A(-3, 0), B(4, 0)$
 Eje Y: $C(0, -12)$

53. $y = 5$

Eje X: no corta.
 Eje Y: $A(0, 5)$

54. $y = x - 3$

Eje X: $A(3, 0)$
 Eje Y: $B(0, -3)$

55. $y = x^2 + 3x - 40$

Eje X: $A(-8, 0), B(5, 0)$
 Eje Y: $C(0, -40)$

56. $y = -x^2 + 9$

Eje X: $A(-3, 0), B(3, 0)$
 Eje Y: $C(0, 9)$

57. $y = x^2 + 2x + 1$

Eje X: $A(-1, 0)$
 Eje Y: $B(0, 1)$

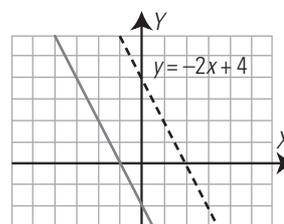
58. $y = x^2 - 4x + 3$

Eje X: $A(1, 0), B(3, 0)$
 Eje Y: $C(0, 3)$

4. TRASLACIONES. SIMETRÍAS. INTERPRETACIÓN CONJUNTA DE GRÁFICAS

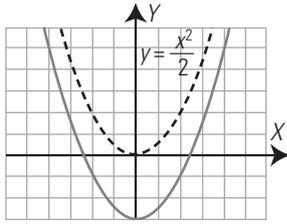
Escribe la fórmula de la gráfica azul, que es una traslación de la gráfica roja, en cada caso. ¿Cuáles son simétricas respecto del eje Y?

59.



$y = -2x - 2$

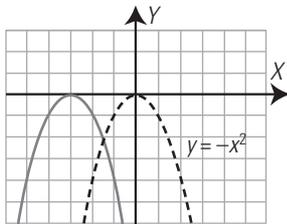
60.



$$y = \frac{x^2}{2} - 3$$

Las dos parábolas son simétricas respecto del eje Y

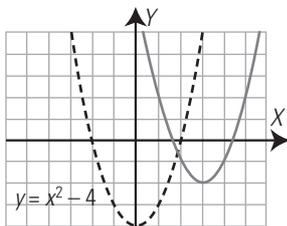
61.



$$y = -(x + 3)^2$$

La función $y = -x^2$ es simétrica respecto del eje Y

62.



$$y = (x - 3)^2 - 2$$

La función $y = x^2 - 4$ es simétrica respecto del eje Y

63. ¿Cuáles de las siguientes funciones son pares?

a) $y = x + 2$

b) $y = x^2 - 3$

¿Alguna de ellas es simétrica respecto del eje Y ?

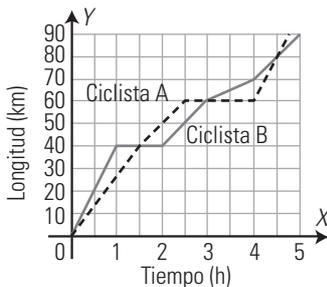
¿Por qué?

a) $f(-x) = -x + 2 \neq f(x) \Rightarrow$ No es par.

b) $f(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3 = f(x) \Rightarrow$ Sí es par.

La función $y = x^2 - 3$ es simétrica respecto del eje Y por ser par.

64. Las gráficas siguientes recogen el recorrido de dos ciclistas. Analízalas y contesta:



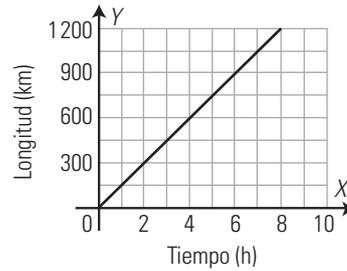
- a) ¿Qué distancia recorre cada uno? ¿Salen a la vez?
- b) ¿Qué ciclista ha ido más rápido? ¿Dónde ha llegado? ¿Se encuentran en algún momento?

a) Ciclista A: 90 km Ciclista B: 90 km
Sí salen a la vez.

b) El ciclista B. Llega a 90 km. Se encuentran a los 40 km de la salida, a los 60 km y a los 80 km

PARA AMPLIAR

65. La siguiente gráfica representa la relación que hay entre el tiempo y el espacio recorrido por un tren:



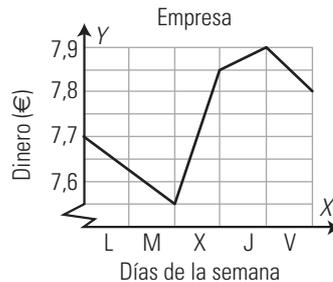
- a) Haz una tabla de valores a partir de la gráfica.
- b) ¿Es continua?
- c) ¿Es creciente o decreciente?
- d) ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido en 8 horas?
- e) ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer 600 km?

a)

Tiempo (h)	0	1	2	3	4	...
Longitud (km)	0	150	300	450	600	...

- b) Sí.
- c) Es creciente.
- d) $150 \cdot 8 = 1200$ km
- e) $600 : 150 = 4$ horas.

66. La gráfica de la cotización en bolsa de cierta empresa durante una semana es la siguiente:

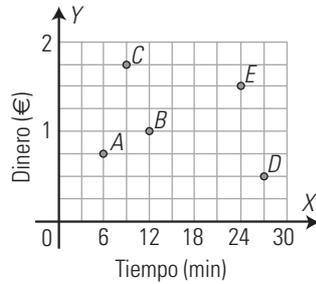


- a) ¿En qué momento alcanza la mayor cotización? ¿Cuál es el valor?
- b) ¿En qué momento alcanza la menor cotización? ¿Cuál es el valor?
- c) ¿Durante qué días ha subido?
- d) ¿Durante qué días ha bajado?
- e) Durante la semana, ¿ha subido o ha bajado? ¿Cuánto?

- a) Al cierre del jueves con 7,9 €
- b) Al cierre del martes con 7,55 €
- c) Miércoles y jueves.
- d) Lunes, martes y viernes.
- e) Ha subido: $7,8 - 7,7 = 0,1$ €

PROBLEMAS

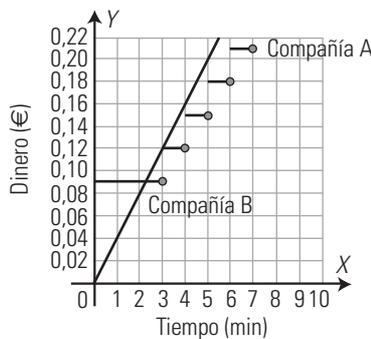
67. La siguiente gráfica representa la duración y el coste de ciertas llamadas telefónicas:



- a) ¿Esta gráfica representa una función?
- b) ¿Es continua?
- c) ¿Qué llamada es la que más tiempo ha durado?
- d) ¿Qué llamada es la que menos tiempo ha durado?
- e) ¿Qué llamada ha sido la más cara?
- f) ¿Qué llamada ha sido la más barata?

- a) Sí. b) No.
- c) La D d) La A
- e) La C f) La D

68. La compañía telefónica A cobra por llamadas locales 0,09 € durante los tres primeros minutos de conversación, y después 0,03 € por cada minuto o fracción de minuto. La compañía telefónica B cobra por segundos a razón de 0,04 € por cada minuto desde el comienzo de la llamada:



- a) Si las llamadas duran menos de 2,25 minutos, ¿qué compañía interesa más?
- b) Si las llamadas duran más de 2,25 minutos, ¿qué compañía interesa más?
- c) Si las llamadas duran exactamente 3 minutos, ¿qué compañía interesa más?

- a) La compañía B
- b) La compañía A
- c) Las dos compañías cobran lo mismo.

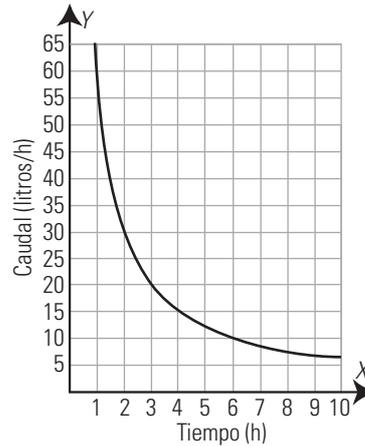
69. Un depósito se llena con un grifo que vierte 60 litros en una hora.

- a) Haz una tabla de valores.
- b) Representa la función del caudal en función del tiempo.
- c) Analiza si tiene asíntotas y explica su significado.

a) Tabla:

Tiempo (h)	1	2	3	4	5	...
Caudal (litros/h)	60	30	20	15	12	...

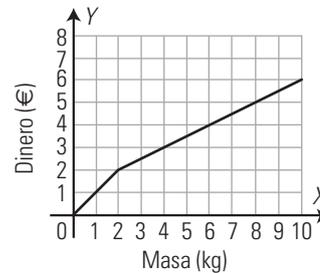
b) Gráfica:



c) Asíntotas:

Asíntota horizontal: $y = 0$
 Si aumenta muchísimo el tiempo para llenar el depósito, el caudal debe ser muy pequeño. Se aproxima a cero.
 Asíntota vertical: $x = 0$
 Si el depósito se llena en muy poco tiempo, el caudal debe ser muy grande. Al aproximarse el tiempo a cero, el caudal tendería al infinito.

70. Dada la gráfica de la oferta de naranjas:



- a) ¿Es una gráfica de puntos o de líneas?
- b) ¿Es creciente o decreciente?
- c) ¿Cuánto cuesta 1 kg de naranjas?
- d) ¿Y 2 kg?
- e) ¿Y 3 kg?
- f) ¿Y 4 kg?
- g) ¿Cómo definirías con palabras la oferta?

- a) Es de líneas.
- b) Creciente.
- c) 1 €
- d) 2 €
- e) 2,5 €
- f) 3 €
- g) A partir de 2 kg el precio del kilo es 0,5 €, la mitad de lo que vale el kilo si se compran uno o dos kilos.

71. Un técnico de televisores cobra 5 € por ir al domicilio y 10 € por cada hora o fracción de hora.

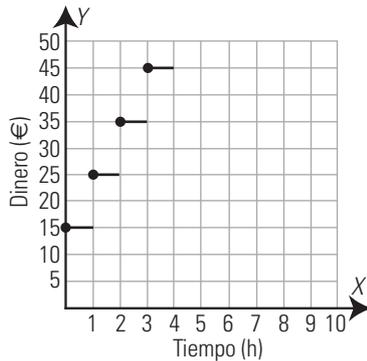
Tiempo (h)	1	2	3	4	5	...
Dinero (€)			35			...

- a) Completa la tabla.
- b) Representa la tabla en unos ejes coordenados.
- c) ¿Es una función continua?

a)

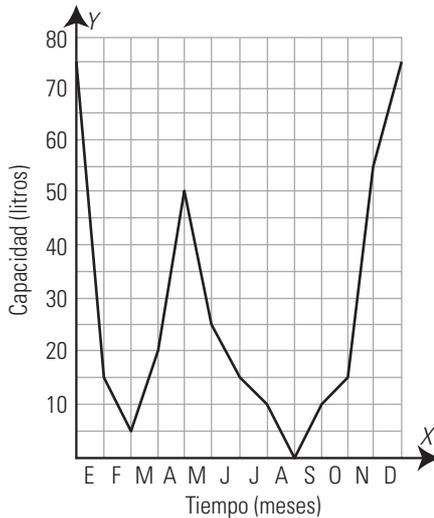
Tiempo (h)	1	2	3	4	5	...
Dinero (€)	15	25	35	45	55	...

b) Si cobra la fracción de hora como hora completa, la gráfica es:

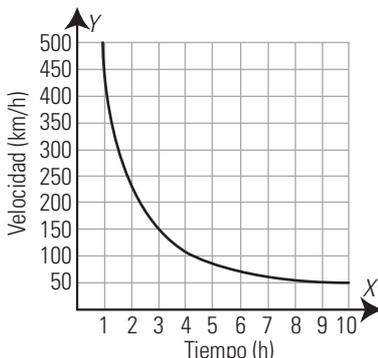


c) No es continua. En cada hora da un salto de 10 €

72. Se considera que la media de agua de lluvia recogida en un depósito en los días lluviosos es de 10 litros. A partir de este dato, representa de forma aproximada en unos ejes coordenados la cantidad de agua que se recogería en dicho depósito a lo largo de un año si estuviese situado en tu ciudad. (Representa en el eje de abscisas los meses del año y en el eje de ordenadas la cantidad de agua recogida).



73. Sabiendo que un coche realiza un recorrido en 5 horas a 90 km/h, representa la velocidad en función del tiempo, analiza si dicha función tiene asíntotas y explica su significado.



Asíntota horizontal: $y = 0$

Si aumenta muchísimo el tiempo para recorrer la distancia, la velocidad debe ser muy baja. Se aproxima a cero.

Asíntota vertical: $x = 0$

Si el tiempo dedicado a recorrer la distancia es muy pequeño, la velocidad debe ser muy alta. Al aproximarse el tiempo a cero, la velocidad tendería al infinito.

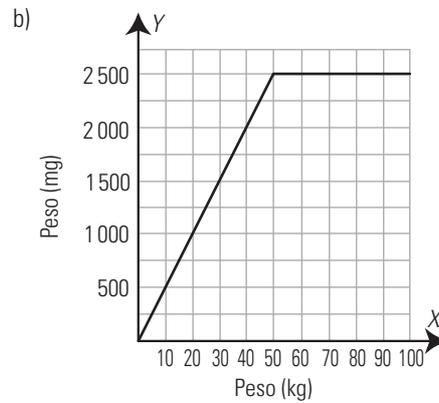
PARA PROFUNDIZAR

74. La dosis de un medicamento es de 10 mg/kg por toma hasta un máximo de 5 tomas al día, sin sobrepasar los 2500 mg al día.

- a) Haz una tabla de valores en la que se recoja la cantidad máxima de medicamento en función del peso del paciente.
- b) Representa la gráfica que expresa la máxima cantidad de medicamento en función del peso.
- c) ¿A partir de qué peso se toma la dosis máxima diaria?

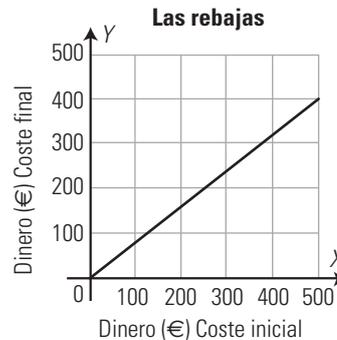
a)

Peso (kg)	10	20	30	40	50	...
Peso (mg)	500	1 000	1 500	2 000	2 500	...



c) A partir de 50 kg

75. La siguiente gráfica representa la relación que hay entre el coste inicial de un producto y el coste final que pagamos en temporada de rebajas:



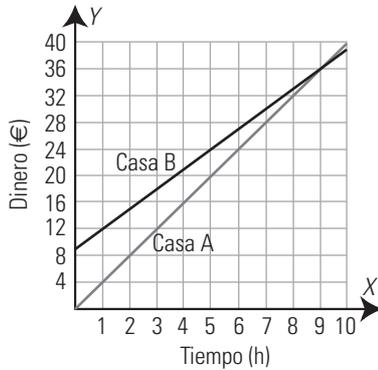
- a) ¿Es creciente o decreciente?
- b) ¿Cuánto pagamos por un artículo que costaba inicialmente 500 €?
- c) ¿Qué tanto por ciento descuentan?
- d) Si hemos pagado por un artículo 200 €, ¿cuánto costaba antes de la rebaja?

- a) Es creciente.
- b) 400 €
- c) El 20%
- d) 250 €

76. Una casa A de alquiler de coches cobra 4 € por cada hora. Otra casa B cobra una cantidad fija de 9 € más 3 € por cada hora. Expresa en cada caso el coste en función del número de horas. Haz la representación gráfica de ambas funciones y razona cuándo interesa alquilar un coche en la casa A y cuándo en la casa B

Casa A: $y = 4x$

Casa B: $y = 3x + 9$

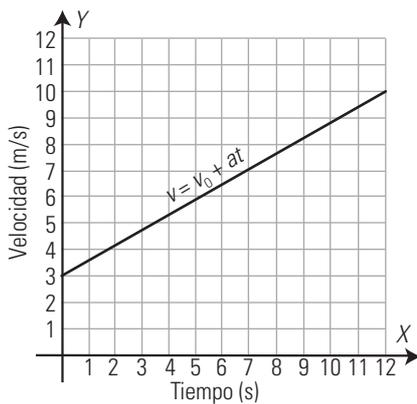


Resolviendo $4x = 3x + 9 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow y = 36$

La casa A es más barata hasta 9 horas de alquiler. A partir de 9 horas es más barata la casa B

APLICA TUS COMPETENCIAS

77. La gráfica adjunta recoge el movimiento de una motocicleta. Calcula la velocidad inicial y la aceleración.



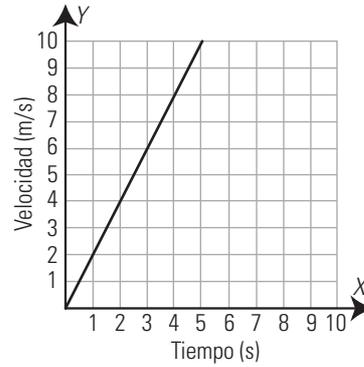
La velocidad inicial es $v_0 = 3 \text{ m/s}$

La aceleración es la pendiente de la recta.

$7/12 = 0,58 \text{ m/s}^2$

78. Un móvil parte del reposo y lleva una aceleración de 2 m/s^2 . Haz una tabla de valores que represente la velocidad del móvil en función del tiempo y representa la gráfica.

Tiempo (h)	1	2	3	4	5	...
Velocidad (m/s)	2	4	6	8	10	...

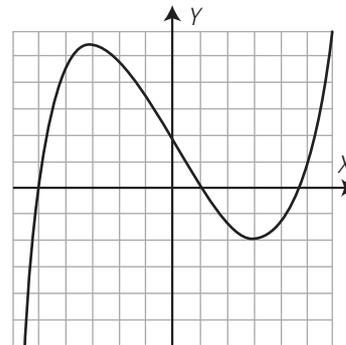


COMPRUEBA LO QUE SABES

1. Escribe las distintas formas de expresar una función. Pon un ejemplo de una gráfica.

Las funciones se pueden expresar mediante un enunciado, una tabla, una gráfica y una fórmula.

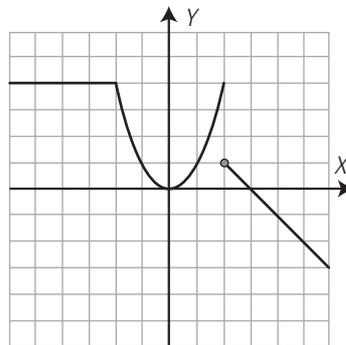
Ejemplo:



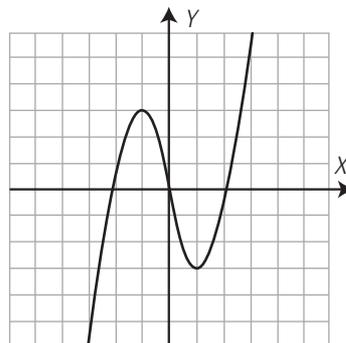
Sí es función.

2. Indica cuál de las siguientes funciones son continuas y cuál no:

a)



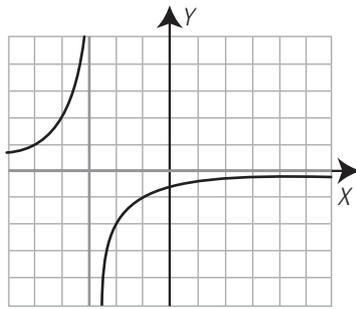
b)



a) Es discontinua en $x = 2$

b) Es continua.

3. Dada la función de la gráfica.



- a) ¿Es continua?
- b) ¿Es periódica?
- c) ¿Es simétrica respecto al eje Y?
- d) Halla sus asíntotas.

- a) No es continua, es discontinua en $x = -3$
- b) No es periódica.
- c) No es simétrica respecto del eje Y
- d) Asíntota vertical $x = -3$
Asíntota horizontal $y = 0$

4. Calcula los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

- a) $y = -3x + 6$
- b) $y = 3x^2 + 4x - 4$

- a) Eje X: A(2, 0)
Eje Y: B(0, 6)
- b) Eje X: A(2/3, 0), B(- 2, 0)
Eje Y: C(0, - 4)

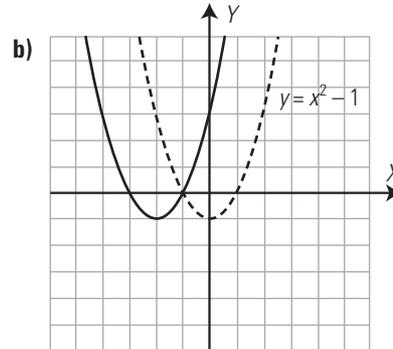
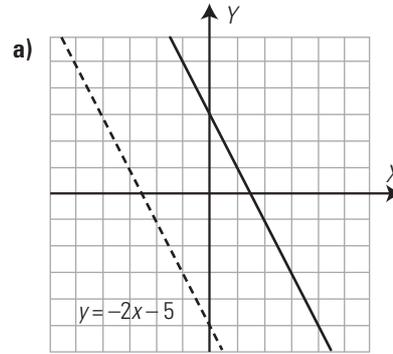
5. La gráfica de la cotización en bolsa de cierta empresa durante una semana es la siguiente:



- a) ¿En qué momento alcanza la mayor cotización? ¿Cuál es el valor?
- b) ¿En qué momento alcanza la menor cotización? ¿Cuál es el valor?
- c) ¿Durante qué días ha subido?
- d) ¿Durante qué días ha bajado?
- e) En la semana, ¿ha subido o ha bajado? ¿Cuánto?

- a) Al cierre del jueves con 7,9 €
- b) Al cierre del martes con 7,55 €
- c) Miércoles y jueves.
- d) Lunes, martes y viernes.
- e) Ha subido: $7,8 - 7,7 = 0,1$ €

6. Escribe la ecuación de la gráfica azul, que es una traslación de la gráfica roja. ¿Cuál es simétrica respecto del eje Y?



- a) $y = -2x - 5 + 8$ $y = -2x + 3$
- b) $y = (x + 2)^2 - 1$ $y = x^2 + 4x + 3$

La función $y = x^2 - 1$ es simétrica respecto del eje Y

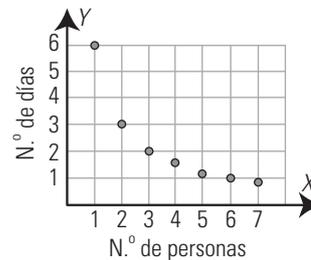
7. Una persona tarda 6 días en recoger las fresas de una finca.

- a) Haz una tabla que exprese el tiempo que se tarda en recoger las fresas en función del número de personas.
- b) Representa la gráfica
- c) ¿Es continua la función?

a) Tabla:

N.º de personas	1	2	3	4	5	6
Tiempo (días)	6	3	2	1,5	1,2	1

b) Gráfica:



c) Es discontinua. La variable independiente es discreta.

8. Un vendedor recibe dos ofertas de trabajo. La empresa A le ofrece un sueldo mensual de 600 € y 60 € por cada ordenador que venda. La empresa B le ofrece 500 € y 80 € por cada ordenador que venda.

- a) Expresa, en cada caso, el salario en función del número de ordenadores que venda.
- b) ¿Cuándo le interesa trabajar en la empresa A?
- c) ¿Cuándo le interesa trabajar en la empresa B?

- a) Empresa A: $y = 600 + 60x$ Empresa B: $y = 500 + 80x$
- b) Cuando venda menos de 5 ordenadores.
- c) Cuando venda más de 5 ordenadores.

WINDOWS/LINUX **WIRIS**

PASO A PASO

79. Dada la función $y = \cos(\pi x)$, ¿es continua?, ¿es periódica?, ¿es simétrica respecto al eje Y?

Resuelto en el libro del alumnado.

80. Dada la función $y = 1 + \frac{2}{x-3}$, ¿es continua?, ¿es periódica?, ¿es simétrica respecto al eje Y? Halla sus asíntotas.

Resuelto en el libro del alumnado.

81. Representa la siguiente función:

$$y = -\frac{x^3}{8} + \frac{3x}{2} + 2$$

- a) ¿Dónde es creciente y dónde decreciente?
- b) Halla los máximos y los mínimos.
- c) ¿Dónde es convexa (∪) y cóncava (∩)?
- d) Halla los puntos de corte con los ejes.

Resuelto en el libro del alumnado.

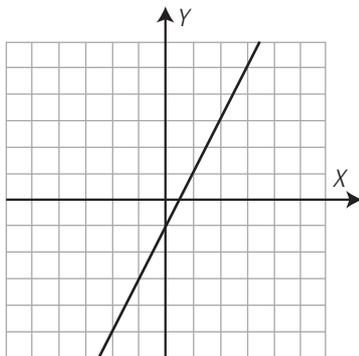
82. Representa la función: $y = x^2$. Haz una traslación de 3 unidades a la izquierda y luego de 4 unidades hacia abajo.

Resuelto en el libro del alumnado.

PRACTICA

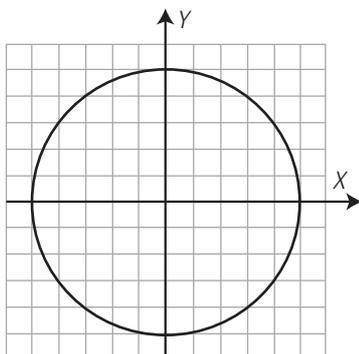
Representa las siguientes fórmulas y razona cuáles son funciones y cuáles no lo son:

83. $y = 2x - 1$



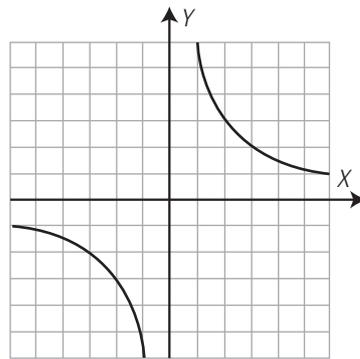
Sí es función.

84. $x^2 + y^2 = 25$



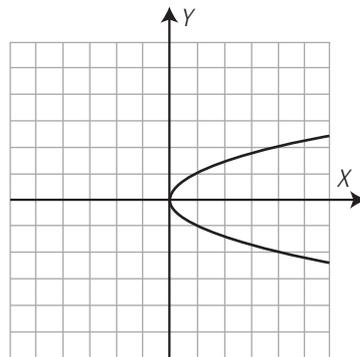
No es función.

85. $x \cdot y = 6$



Sí es función.

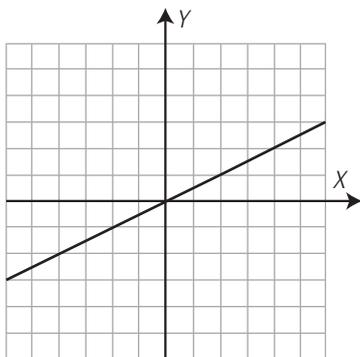
86. $x - y^2 = 0$



No es función.

Representa las funciones y, para cada una de ellas, contesta: ¿Es continua? ¿Es periódica? ¿Es simétrica respecto del eje Y? Halla las asíntotas.

87. $y = \frac{x}{2}$



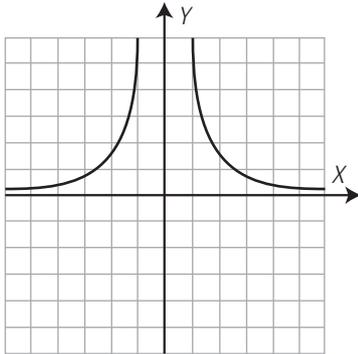
Es continua.

No es periódica.

No es simétrica respecto del eje Y

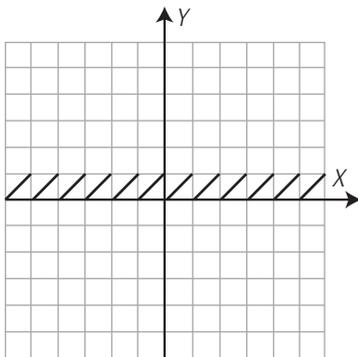
No tiene asíntotas.

88. $y = \frac{6}{x^2}$



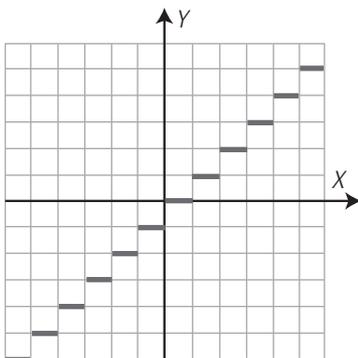
No es continua. Es discontinua en $x = 0$
 No es periódica.
 Es simétrica respecto del eje Y
 Asíntota vertical $x = 0$
 Asíntota horizontal $y = 0$

89. $y = \text{decimal}(x)$



No es continua. Da saltos en los valores enteros de x
 Es periódica de período 1
 No es simétrica respecto del eje Y
 No tiene asíntotas.

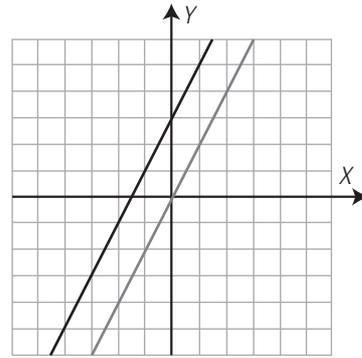
90. $y = \text{suelo}(x)$



No es continua.
 Es periódica de período π
 No es simétrica respecto del eje Y

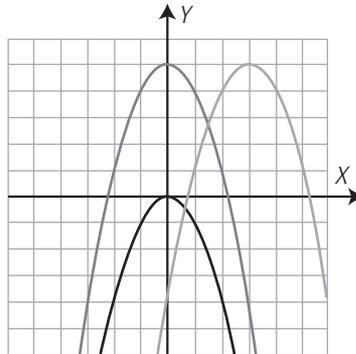
91. Representa la función $y = 2x$
 Haz una traslación de 3 unidades hacia arriba.

$y = 2x + 3$



92. Representa la función $y = -x^2$. Haz una traslación de 5 unidades hacia arriba, y luego haz una traslación de 3 unidades hacia la derecha.

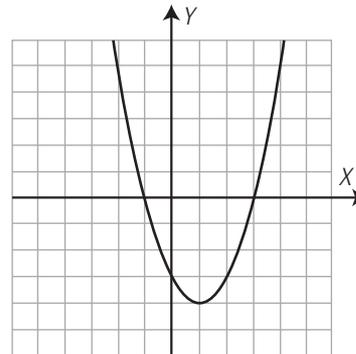
$y = -x^2 + 5$
 $y = -(x - 3)^2 + 5$



Representa las funciones y , para cada una de ellas, halla:

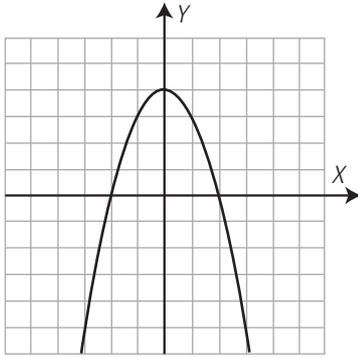
- a) ¿Dónde son crecientes y dónde decrecientes?
- b) Máximos y mínimos.
- c) ¿Dónde son convexas (\cup) y dónde cóncavas (\cap)?
- d) Los puntos de corte con los ejes.

93. $y = x^2 - 2x - 3$



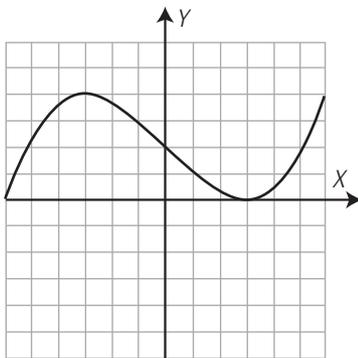
- a) Creciente: a la derecha de 1
 Decreciente: a la izquierda de 1
- b) Mínimo: $A(1, -4)$
- c) Convexa (\cup): en todo el dominio.
 Cóncava (\cap): no es cóncava nunca.
- d) Eje X : $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$
 Eje Y : $C(0, -3)$

94. $y = -x^2 + 4$



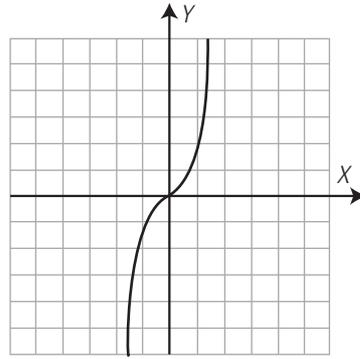
- a) Creciente: a la izquierda de cero.
Decreciente: a la derecha de cero.
- b) Máximo: $A(0, 4)$
- c) Convexa (\cup): no es convexa nunca.
Cóncava (\cap): en todo el dominio.
- d) Eje X: $A(-2, 0), B(2, 0)$
Eje Y: $C(0, 4)$

95. $y = \frac{x^3}{27} - x + 2$



- a) Creciente: a la izquierda de -3 y a la derecha de 3
Decreciente: entre -3 y 3
- b) Máximo: $A(-3, 4)$
Mínimo: $B(3, 0)$
- c) Convexa (\cup): a la derecha de cero.
Cóncava (\cap): a la izquierda de cero.
- d) Eje X: $A(-6, 0), B(3, 0)$
Eje Y: $C(0, 2)$

96. $y = x^3$

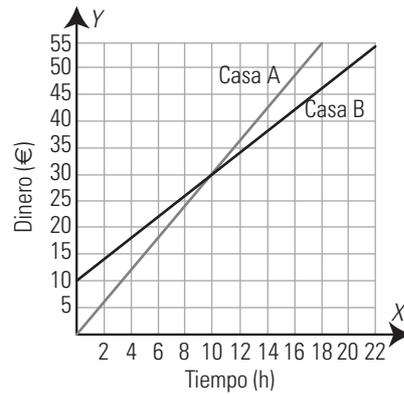


- a) Creciente: siempre.
Decreciente: nunca.
- b) No tiene máximos ni mínimos.
- c) Convexa (\cup): después de $x = 0$
Cóncava (\cap): antes de $x = 0$
- d) Eje X: $O(0, 0)$
Eje Y: $O(0, 0)$

97. Una casa A de alquiler de coches cobra 3 € por cada hora. Otra casa B cobra una cantidad fija de 10 € más 2 € por cada hora. Expresa en cada caso el coste en función del número de horas. Haz la representación gráfica de ambas funciones y razona cuándo interesa alquilar un coche en la casa A y cuándo en la casa B

Casa A: $y = 3x$

Casa B: $y = 2x + 10$



Es más barata la casa A hasta 10 horas. Después es más barata la casa B

9. Rectas e hipérbolas

1. FUNCIONES CONSTANTES Y LINEALES

PIENSA Y CALCULA

Halla mentalmente el valor de la constante de proporcionalidad directa en la compra de peras sabiendo que 5 kg de peras cuestan 10 €

$$\text{Constante} = 10 : 5 = 2$$

CARNÉ CALCULISTA

Desarrolla: $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}$

Factoriza: $x^2 - 5 = (x - 5)(x + 5)$

APLICA LA TEORÍA

Halla mentalmente la pendiente de las siguientes funciones lineales, y di si son crecientes o decrecientes:

1. $y = 3x$

$m = 3 > 0 \Rightarrow$ Función creciente.

2. $y = -x/3$

$m = -1/3 < 0 \Rightarrow$ Función decreciente.

3. $y = 3x/2$

$m = 3/2 > 0 \Rightarrow$ Función creciente.

4. $y = -4x/3$

$m = -4/3 < 0 \Rightarrow$ Función decreciente.

5. Halla la ecuación de la siguiente función definida por una tabla de valores y clasifícala:

x	1	2	5	10
y	1,2	2,4	6	12

$$y = 1,2x$$

Es una función lineal o de proporcionalidad directa.

Halla las ecuaciones de las siguientes funciones definidas verbalmente y clasifícalas:

6. La temperatura baja 2 grados cada hora. Halla la temperatura en función del tiempo.

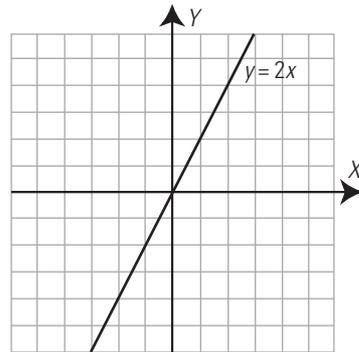
$$y = -2x \Rightarrow \text{Es una función lineal.}$$

7. La entrada al zoo cuesta 5 €. Halla el coste en función del tiempo que dura la visita.

$$y = 5 \Rightarrow \text{Es una función constante.}$$

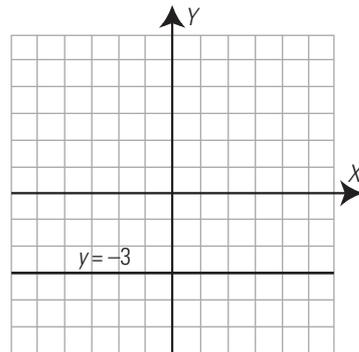
Representa gráficamente las siguientes ecuaciones. Di cuáles son funciones y clasifícalas:

8. $y = 2x$



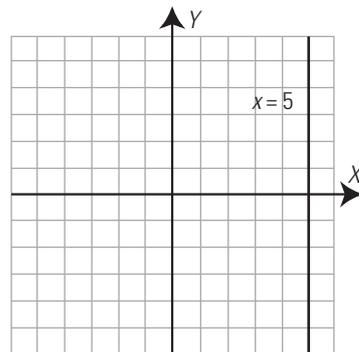
Función lineal.

9. $y = -3$



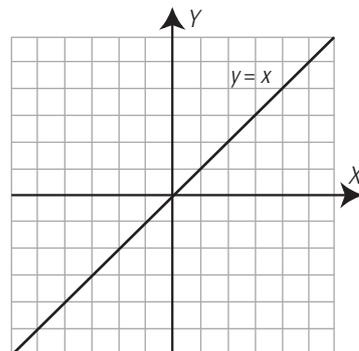
Función constante.

10. $x = 5$



No es función.

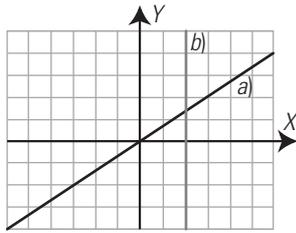
11. $y = x$



Función lineal.

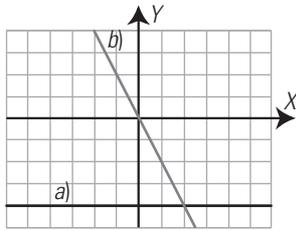
Halla las ecuaciones de las siguientes rectas, di cuáles son funciones y clasifica estas:

12.



- a) $P(3, 2) \Rightarrow m = 2/3 \Rightarrow y = 2x/3 \Rightarrow$ Función lineal.
 b) $P(2, 0) \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$ No es función.

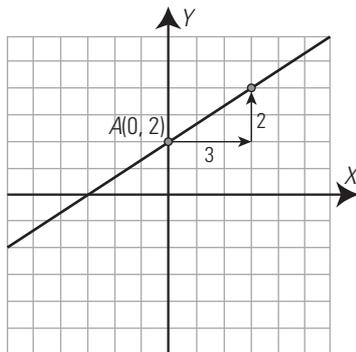
13.



- a) $P(0, -4) \Rightarrow m = 0 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow$ Función constante.
 b) $P(1, -2) \Rightarrow m = -2 \Rightarrow y = -2x \Rightarrow$ Función lineal.

**2. FUNCIÓN AFÍN
PIENSA Y CALCULA**

Dibuja la recta que pasa por el punto $A(0, 2)$ y tiene de pendiente $m = 2/3$



CARNÉ CALCULISTA

Resuelve la ecuación: $2 - \frac{3x - 7}{6} = \frac{11}{4} - \frac{4x - 3}{7}$

$x = 1/6$

APLICA LA TEORÍA

Halla mentalmente la pendiente y la ordenada en el origen de las funciones afines siguientes:

14. $y = 2x + 1$

Pendiente: $m = 2$
 Ordenada en el origen: $b = 1$

15. $y = -x/2 + 3$

Pendiente: $m = -1/2$
 Ordenada en el origen: $b = 3$

16. $y = 2x/3 - 4$

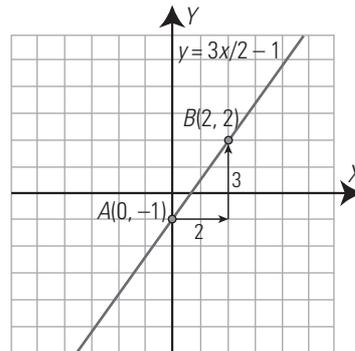
Pendiente: $m = 2/3$
 Ordenada en el origen: $b = -4$

17. $y = -3x/4 - 2$

Pendiente: $m = -3/4$
 Ordenada en el origen: $b = -2$

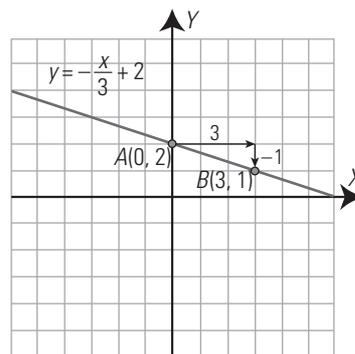
Dibuja la gráfica de las funciones afines siguientes. Halla en cada una de ellas la pendiente y la ordenada en el origen. ¿Cuál es creciente? ¿Cuál es decreciente?

18. $y = 3x/2 - 1$



La pendiente: $m = 3/2 > 0 \Rightarrow$ Función creciente.
 La ordenada en el origen: $b = -1$

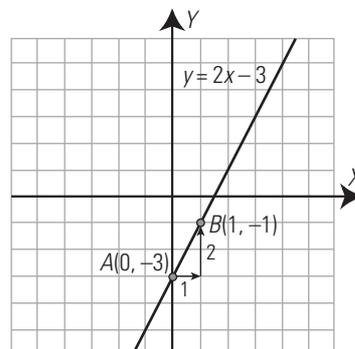
19. $y = -x/3 + 2$



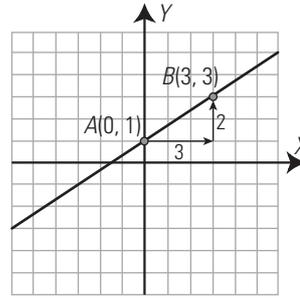
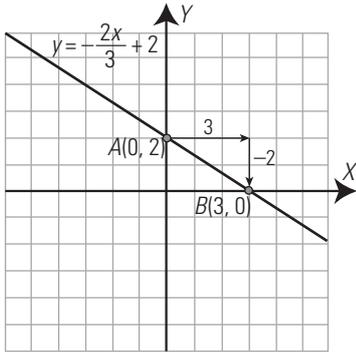
La pendiente: $m = -1/3 < 0 \Rightarrow$ Función decreciente.
 La ordenada en el origen: $b = 2$

Representa las siguientes rectas:

20. $2x - y = 3$



21. $2x + 3y = 6$

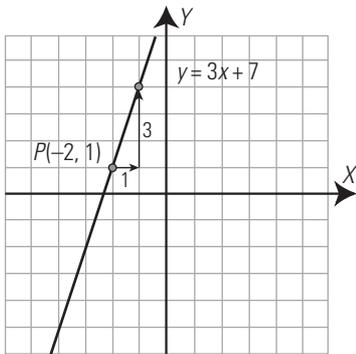


$A(0, 1) \Rightarrow b = 1$

$A(0, 1) \text{ y } B(3, 3) \Rightarrow m = \frac{2}{3}$

$y = \frac{2}{3}x + 1$

22. Representa la recta que pasa por el punto $P(-2, 1)$, cuya pendiente es $m = 3$. Halla su ecuación.

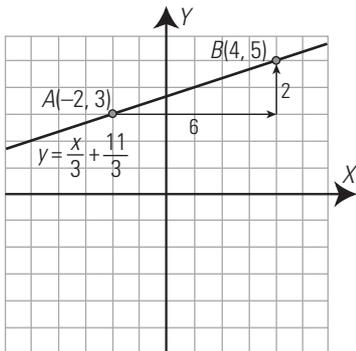


Pendiente: $m = 3$

Punto: $P(-2, 1)$

$y - 1 = 3(x + 2) \Rightarrow y = 3x + 7$

23. Representa la recta que pasa por los puntos $A(-2, 3)$ y $B(4, 5)$. Halla su ecuación.



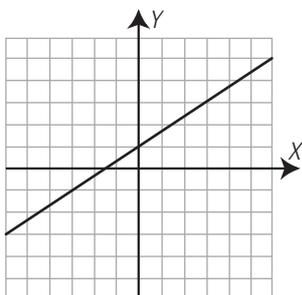
Pendiente: $m = \frac{5 - 3}{4 - (-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Punto: $A(-2, 3)$

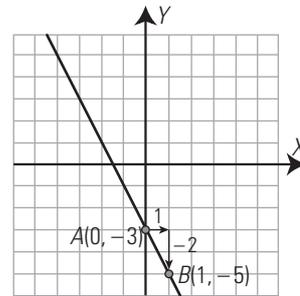
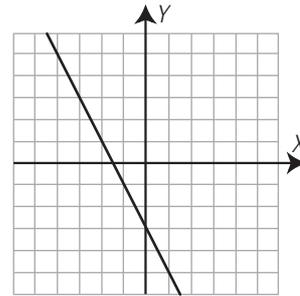
$y - 3 = \frac{1}{3}(x + 2) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$

Halla las ecuaciones de las rectas siguientes:

24.



25.



$A(0, -3) \Rightarrow b = -3$

$A(0, -3) \text{ y } B(1, -5) \Rightarrow m = -2$

$y = -2x - 3$

26. Un fontanero cobra 12 € por ir a domicilio, más el tiempo que trabaja, de forma proporcional, a razón de 10 € por cada hora. Halla la ecuación que calcula el coste en función del tiempo que tarda en hacer el trabajo. ¿Qué tipo de función es?

$y = 10x + 12$

Es una función afín.

3. FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

PIENSA Y CALCULA

Halla mentalmente el valor de la constante de proporcionalidad inversa k sabiendo que cuatro alumnos o alumnas tardan nueve tardes en editar la revista del centro en la sala de ordenadores.

$k = 9 \cdot 4 = 36$

CARNÉ CALCULISTA

Resuelve la ecuación: $(x + 2)(x - 2) = 5$

$x = -3; x = 3$

APLICA LA TEORÍA

Halla mentalmente la constante de proporcionalidad inversa de las siguientes funciones, y di si son crecientes o decrecientes:

27. $y = 3x$

$k = 3 > 0 \Rightarrow$ Decreciente.

28. $y = -2/x$

$k = -2 < 0 \Rightarrow$ Creciente.

29. $y = -6/x$

$k = -6 < 0 \Rightarrow$ Creciente.

30. $y = 4/x$

$k = 4 > 0 \Rightarrow$ Decreciente.

Halla las ecuaciones de las siguientes funciones definidas verbalmente ¿Qué tipo de funciones son?

31. Cinco personas tardan 8 días en hacer un trabajo. Calcula el tiempo que se tarda en hacerlo en función del número de personas.

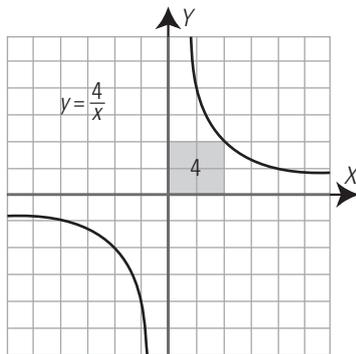
$y = 40/x \Rightarrow$ Es una función de proporcionalidad inversa.

32. Un vehículo hace un trayecto de 600 km a velocidad constante. Obtén la velocidad que lleva en función del tiempo.

$v = 600/t \Rightarrow$ Es una función de proporcionalidad inversa.

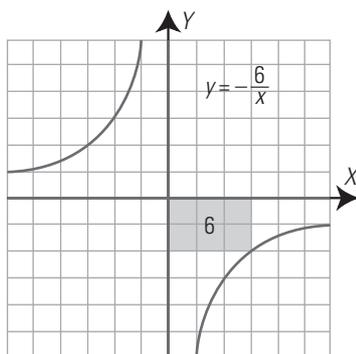
Representa gráficamente las siguientes hipérbolas y di cuáles son crecientes y cuáles decrecientes:

33. $y = 4/x$



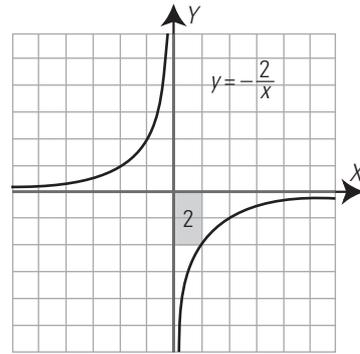
$k = 4 > 0 \Rightarrow$ Decreciente.

34. $y = -6/x$



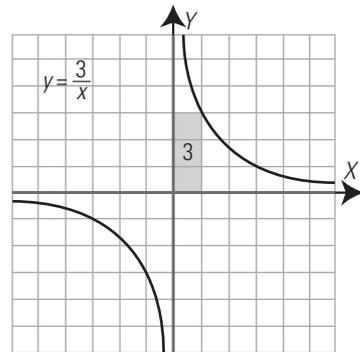
$k = -6 < 0 \Rightarrow$ Creciente.

35. $y = -2/x$



$k = -2 < 0 \Rightarrow$ Creciente.

36. $y = 3/x$



$k = 3 > 0 \Rightarrow$ Decreciente.

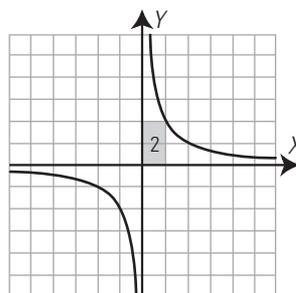
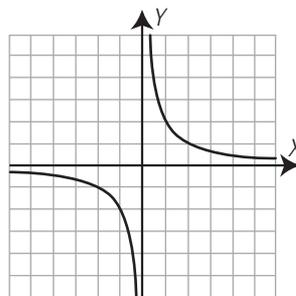
37. Halla la ecuación de la siguiente función definida por una tabla de valores. ¿Qué tipo de función es? ¿Es creciente o decreciente?

x	1	-1	2	-2	4	-4	8	-8
y	8	-8	4	-4	2	-2	1	-1

$y = 8/x \Rightarrow$ Es una función de proporcionalidad inversa.
 $k = 8 > 0 \Rightarrow$ Decreciente.

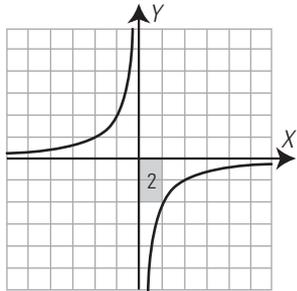
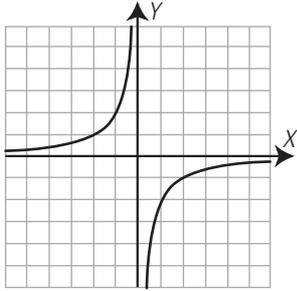
Halla las ecuaciones de las siguientes hipérbolas:

38.



$k = 2 \Rightarrow y = 2/x$

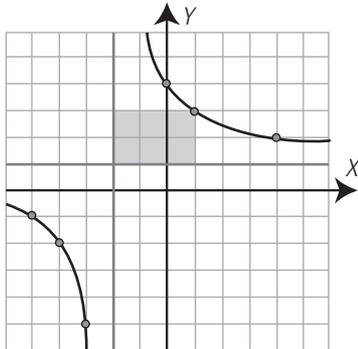
39.



$k = -2 \Rightarrow y = -2/x$

**4. TRASLACIONES DE LA HIPÉRBOLA
PIENSA Y CALCULA**

Halla el área del rectángulo coloreado y las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola del dibujo.



Área = 6 unidades cuadradas.

Asíntota vertical: $x = -2$

Asíntota horizontal: $y = 1$

CARNÉ CALCULISTA

Resuelve el sistema por el método más sencillo:

$$\begin{cases} y = 3x - 3 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

$x = 2, y = 3$

APLICA LA TEORÍA

De las siguientes funciones, halla mentalmente cuáles son de proporcionalidad y calcula en estas la constante de proporcionalidad:

40. $y = 5/x$

Función de proporcionalidad inversa, $k = 5$

41. $y = -5x + 3$

Función afín, no es de proporcionalidad.

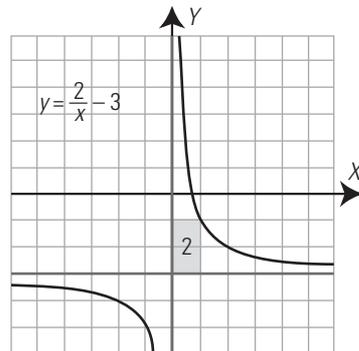
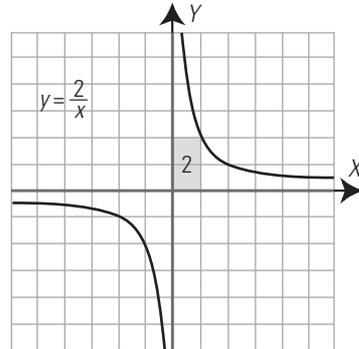
42. $y = -3/x$

Función de proporcionalidad inversa, $k = -3$

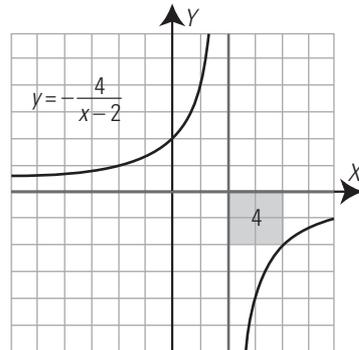
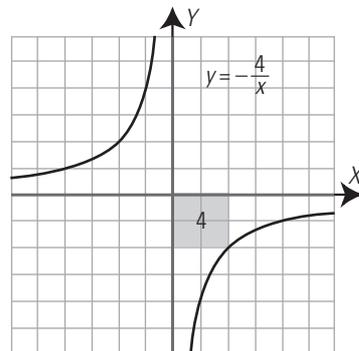
43. $y = x^3 - 2$

Función polinómica de grado 3, no es de proporcionalidad.

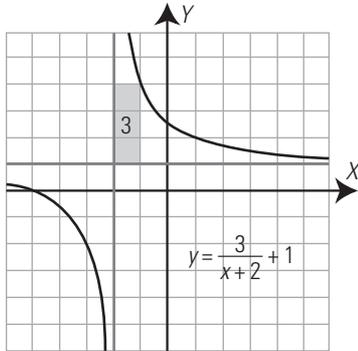
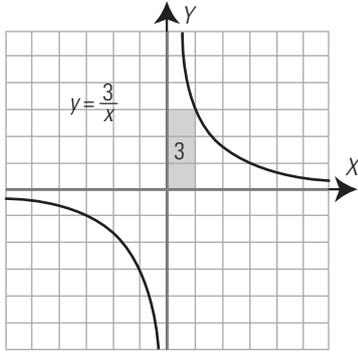
44. Dibuja la hipérbola $y = 2/x$, trasládala 3 unidades hacia abajo y halla su nueva ecuación.



45. Dibuja la hipérbola $y = -4/x$, trasládala 2 unidades hacia la derecha y halla su nueva ecuación.

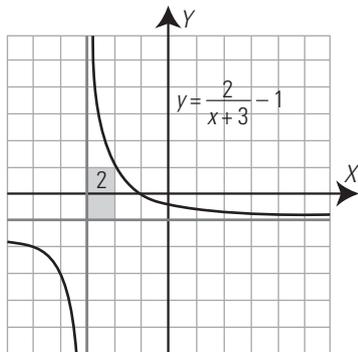


46. Dibuja la hipérbola $y = 3/x$, trasládala 1 unidad hacia arriba y 2 hacia la izquierda y halla su nueva ecuación.



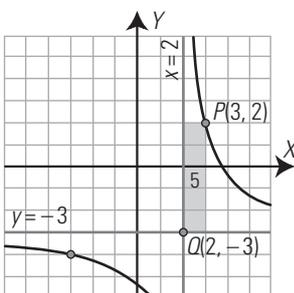
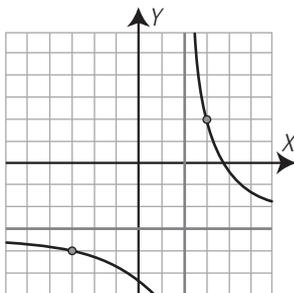
47. Dibuja la siguiente hipérbola:

$$y = \frac{2}{x+3} - 1$$



Halla la ecuación de las siguientes hipérbolas:

48.



El rectángulo que tiene como vértices opuestos el punto $P(3, 2)$ y el punto de corte de las asíntotas, $Q(2, -3)$, tiene de área 5. Como la hipérbola es decreciente $\Rightarrow k = 5$

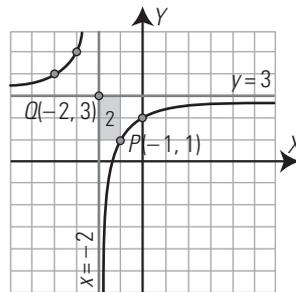
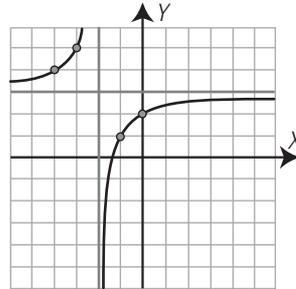
Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = -3 \Rightarrow r = -3$$

$$x = 2 \Rightarrow s = 2$$

$$\text{La ecuación es } y = \frac{5}{x-2} - 3$$

49.



El rectángulo que tiene como vértices opuestos el punto $P(-1, 1)$ y el punto de corte de las asíntotas, $Q(-2, 3)$, tiene de área 2. Como la hipérbola es creciente $\Rightarrow k = -2$

Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = 3 \Rightarrow r = 3$$

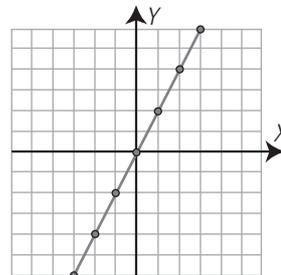
$$x = -2 \Rightarrow s = -2$$

$$\text{La ecuación es } y = \frac{-2}{x+2} + 3$$

Halla el tipo de cada una de las siguientes funciones y calcula mentalmente su ecuación:

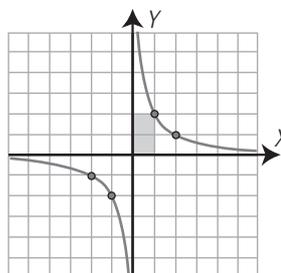
1. Función lineal o de proporcionalidad directa.

$$y = 2x$$



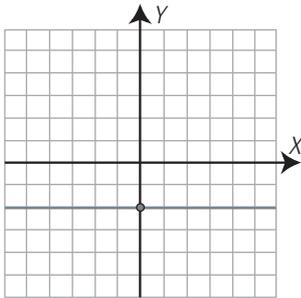
2. Función de proporcionalidad inversa.

$$y = \frac{2}{x}$$



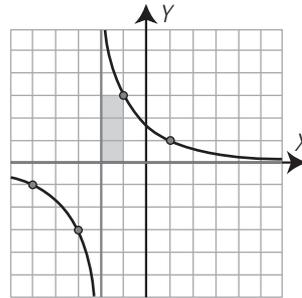
3. Función constante.

$$y = -2$$



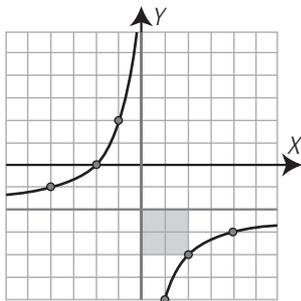
7. No es de proporcionalidad.

$$y = \frac{3}{x+2}$$



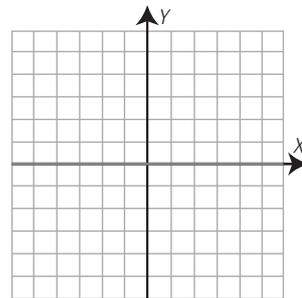
4. No es de proporcionalidad.

$$y = -\frac{4}{x} - 2$$



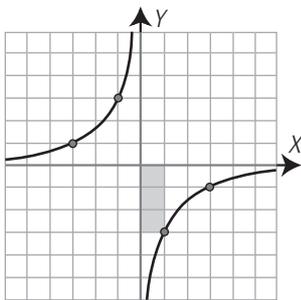
8. Función constante. Es el eje X

$$y = 0$$



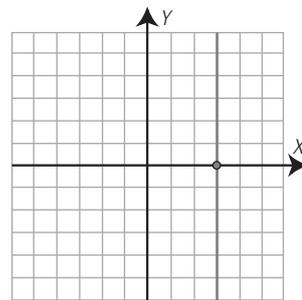
5. Función de proporcionalidad inversa.

$$y = -\frac{3}{x}$$



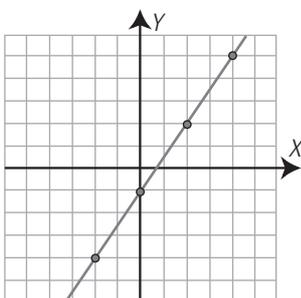
9. No es función.

$$x = 3$$



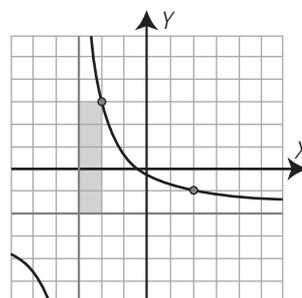
6. Función afín. No es de proporcionalidad.

$$y = \frac{3}{2}x - 1$$



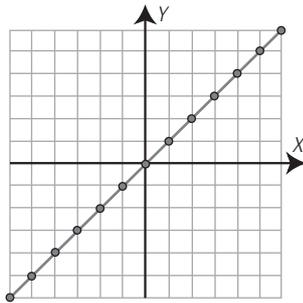
10. No es de proporcionalidad.

$$y = \frac{5}{x+3} - 2$$



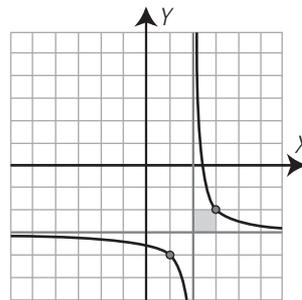
11. Función de proporcionalidad directa.

$$y = x$$



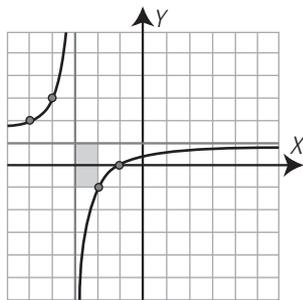
15. No es de proporcionalidad.

$$y = \frac{1}{x-2} - 3$$



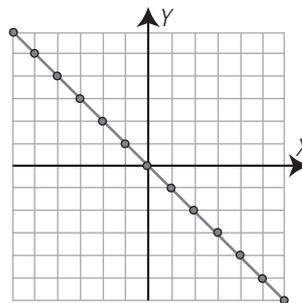
12. No es de proporcionalidad.

$$y = -\frac{2}{x+3} + 1$$



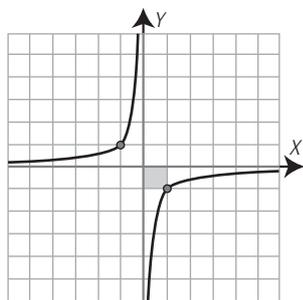
16. Función de proporcionalidad directa.

$$y = -x$$



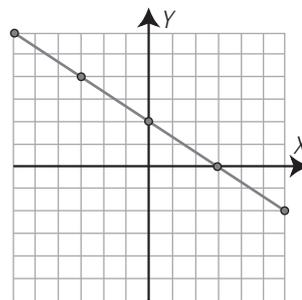
13. Función de proporcionalidad inversa.

$$y = -\frac{1}{x}$$



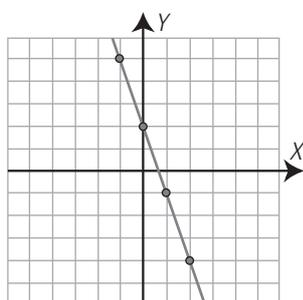
17. Función afín. No es de proporcionalidad.

$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$



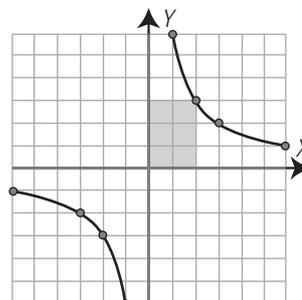
14. Función afín. No es de proporcionalidad.

$$y = -3x + 2$$

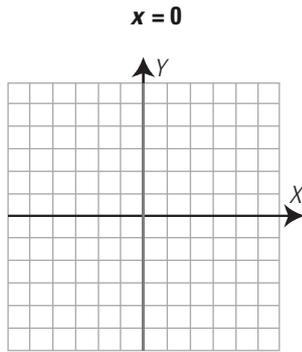


18. Función de proporcionalidad inversa.

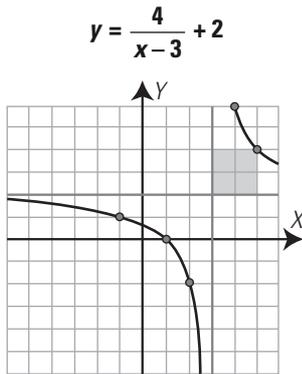
$$y = -\frac{6}{x}$$



19. No es función. Es el eje Y



20. No es de proporcionalidad.



56. Halla la ecuación de la siguiente función definida por una tabla de valores y clasifica esta:

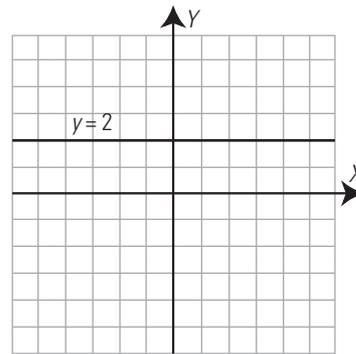
x	1	-2	5	-10
y	-0,5	1	-2,5	5

$m = -0,5$

$y = -x/2 \Rightarrow$ Es una función de proporcionalidad directa.

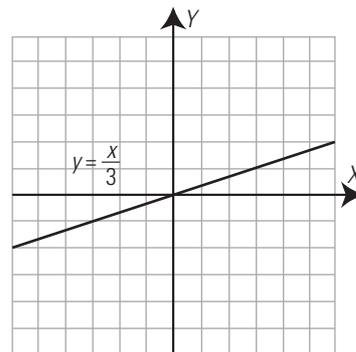
Representa gráficamente las siguientes ecuaciones, di cuáles son funciones y clasifícalas:

57. $y = 2$



Función constante.

58. $y = x/3$



Función de proporcionalidad directa.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. FUNCIONES CONSTANTES Y LINEALES

Halla mentalmente la pendiente de las siguientes funciones lineales o de proporcionalidad directa, y di si son crecientes o decrecientes:

50. $y = 2x$

$m = 2 > 0 \Rightarrow$ Función creciente.

51. $y = -3x$

$m = -3 < 0 \Rightarrow$ Función decreciente.

52. $y = -x$

$m = -1 < 0 \Rightarrow$ Función decreciente.

53. $y = x/2$

$m = 1/2 > 0 \Rightarrow$ Función creciente.

Halla las ecuaciones de las siguientes funciones definidas verbalmente y clasifica estas:

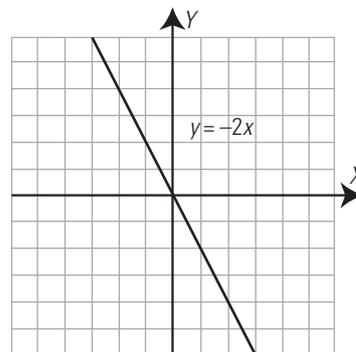
54. La entrada a un parque de atracciones cuesta 6 €. Obtén el coste en función del tiempo de estancia.

$y = 6 \Rightarrow$ Es una función constante.

55. Un kilo de plátanos cuesta 1,5 €. Obtén el coste en función del peso.

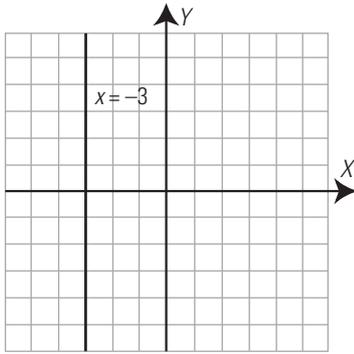
$y = 1,5x \Rightarrow$ Es una función lineal o de proporcionalidad directa.

59. $y = -2x$



Función de proporcionalidad directa.

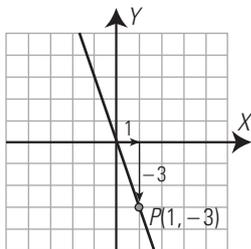
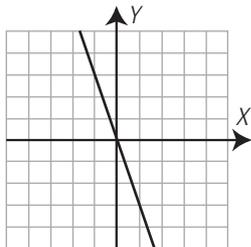
60. $y = -3$



No es función.

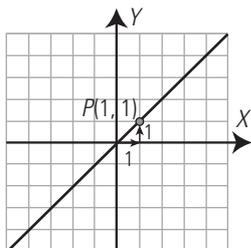
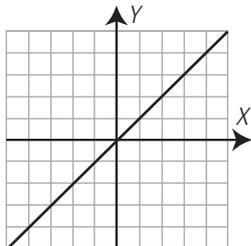
Halla las ecuaciones de las siguientes rectas, di cuáles son funciones y clasifica estas:

61.



$P(1, -3) \Rightarrow m = -3 \Rightarrow y = -3x \Rightarrow$ Función lineal o de proporcionalidad directa.

62.



$P(1, 1) \Rightarrow m = 1 \Rightarrow y = x \Rightarrow$ Función lineal o de proporcionalidad directa.

Halla la pendiente de las siguientes funciones lineales o de proporcionalidad directa y di si son crecientes o decrecientes.

63. $y = 1,5x$

$m = 1,5 > 0 \Rightarrow$ Función creciente.

64. $y = -x/2$

$m = -1/2 < 0 \Rightarrow$ Función decreciente.

65. $y = -3x$

$m = -3 < 0 \Rightarrow$ Función decreciente.

66. $y = x$

$m = 1 > 0 \Rightarrow$ Función creciente.

2. FUNCIÓN AFÍN

Halla mentalmente la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones afines:

67. $y = -3x + 2$

Pendiente: $m = -3$

Ordenada en el origen: $b = 2$

68. $y = x/3 - 2$

Pendiente: $m = 1/3$

Ordenada en el origen: $b = -2$

69. $y = 5x/4 - 3$

Pendiente: $m = 5/4$

Ordenada en el origen: $b = -3$

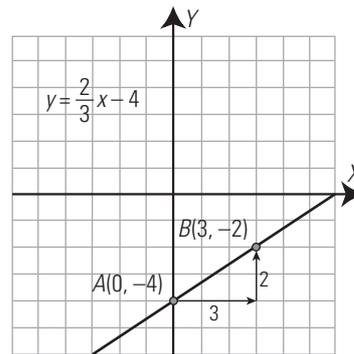
70. $y = -2x/3 + 1$

Pendiente: $m = -2/3$

Ordenada en el origen: $b = 1$

Dibuja la gráfica de las funciones afines siguientes y halla en cada una de ellas la pendiente y la ordenada en el origen. ¿Cuál es creciente y cuál decreciente?

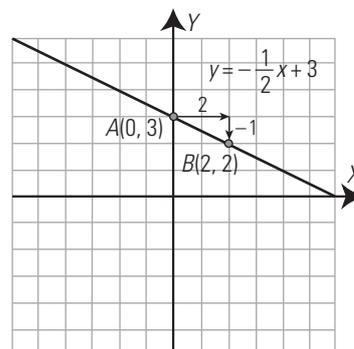
71. $y = 2x/3 - 4$



Pendiente: $m = 2/3 > 0 \Rightarrow$ Función creciente.

Ordenada en el origen: $b = -4$

72. $y = -x/2 + 3$



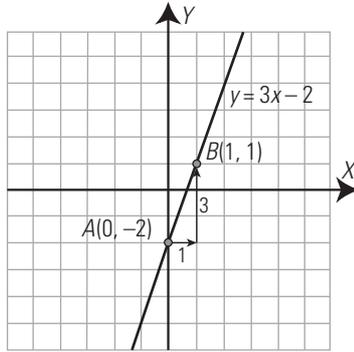
Pendiente: $m = -1/2 < 0 \Rightarrow$ Función decreciente.

Ordenada en el origen: $b = 3$

Representa las siguientes rectas:

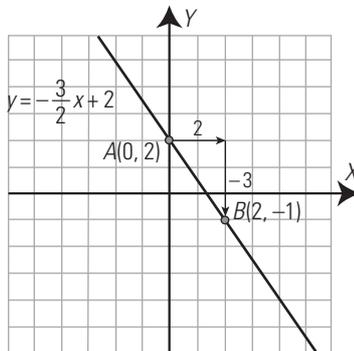
73. $3x - y = 2$

$$y = 3x - 2$$

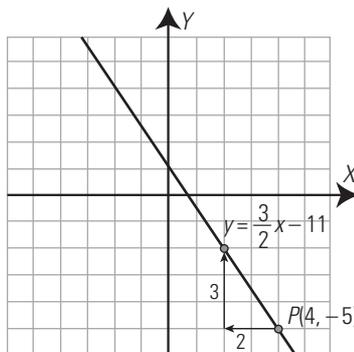


74. $3x + 2y = 4$

$$y = -\frac{3}{2}x + 2$$



75. Representa la recta que pasa por el punto $P(4, -5)$ y tiene de pendiente $m = 3/2$. Halla su ecuación.

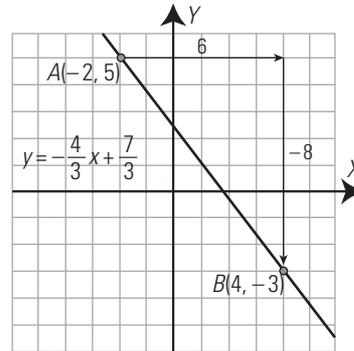


Pendiente: $m = 3/2$

Punto: $P(4, -5)$

$$y + 5 = \frac{3}{2}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 11$$

76. Representa la recta que pasa por los puntos $A(-2, 5)$ y $B(4, -3)$. Halla su ecuación.



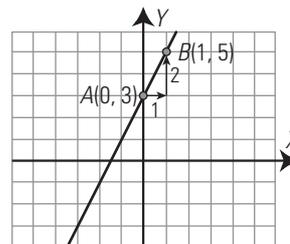
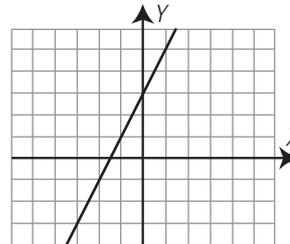
$$\text{Pendiente: } m = \frac{-3 - 5}{4 + 2} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

Punto: $A(-2, 5)$

$$y - 5 = -\frac{4}{3}(x + 2) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$$

Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

77.

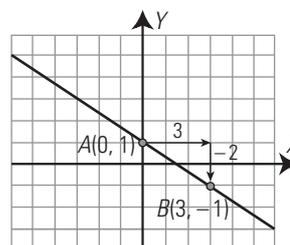
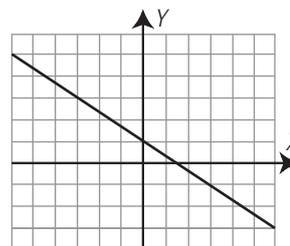


$A(0, 3) \Rightarrow b = 3$

$A(0, 3)$ y $B(1, 5) \Rightarrow m = 2$

$$y = 2x + 3$$

78.



$A(0, 1) \Rightarrow b = 1$

$A(0, 1)$ y $B(3, -1) \Rightarrow m = -2/3$

$$y = -2x/3 + 1$$

3. FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

Halla mentalmente la constante de proporcionalidad inversa de las siguientes funciones y di si son crecientes o decrecientes:

79. $y = 2/x$

$k = 2 > 0 \Rightarrow$ Decreciente.

80. $y = -3/x$

$k = -3 < 0 \Rightarrow$ Creciente.

81. $y = -4/x$

$k = -4 < 0 \Rightarrow$ Creciente.

82. $y = 6/x$

$k = 6 > 0 \Rightarrow$ Decreciente.

Halla las ecuaciones de las siguientes funciones definidas verbalmente. ¿De qué tipo son?

83. Doce personas tardan un día en recoger las patatas de una finca. Obtén el tiempo que se tarda en función del número de personas.

$y = 12/x \Rightarrow$ Es una función de proporcionalidad inversa.

84. Un vehículo hace un trayecto de 400 km a velocidad constante. Obtén el tiempo del trayecto en función de la velocidad.

Solución:

$t = 400/v \Rightarrow$ Es una función de proporcionalidad inversa.

85. Halla la ecuación de la siguiente función definida por una tabla de valores. ¿Qué tipo de función es? ¿Es creciente o decreciente?

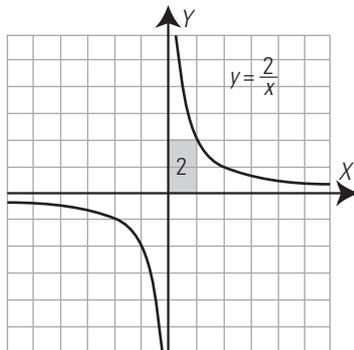
x	1	-1	3	-3	9	-9
y	-9	9	-3	3	-1	1

$y = -9/x \Rightarrow$ Es una función de proporcionalidad inversa.

$k = -9 < 0 \Rightarrow$ Creciente.

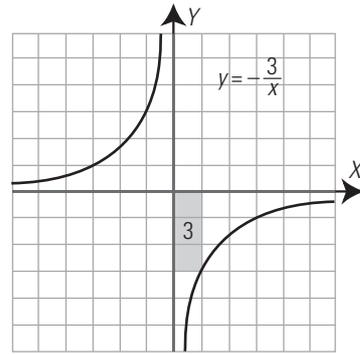
Representa gráficamente las siguientes hipérbolas, di cuáles son crecientes y cuáles decrecientes.

86. $y = 2/x$



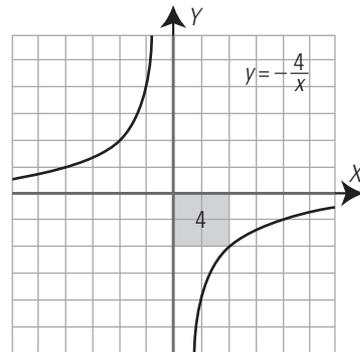
$k = 2 > 0 \Rightarrow$ Decreciente.

87. $y = -3/x$



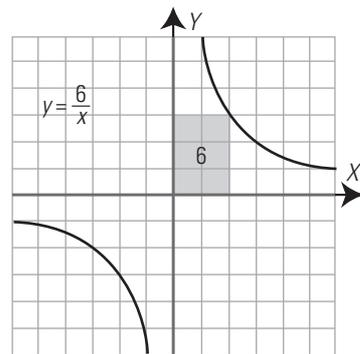
$k = -3 < 0 \Rightarrow$ Creciente.

88. $y = -4/x$



$k = -4 < 0 \Rightarrow$ Creciente.

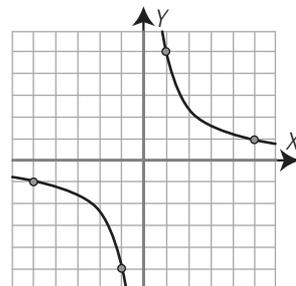
89. $y = 6/x$

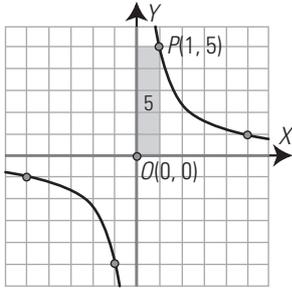


$k = 6 > 0 \Rightarrow$ Decreciente.

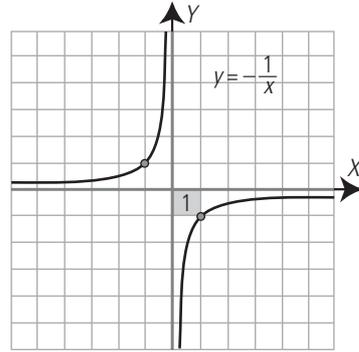
Halla las ecuaciones de las siguientes hipérbolas:

90.

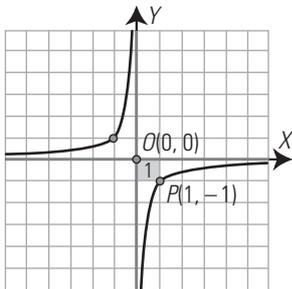
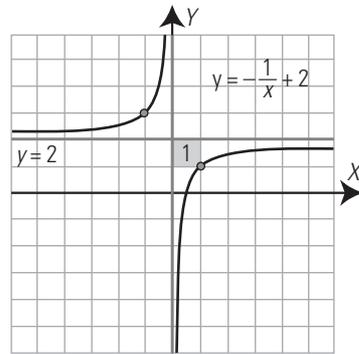
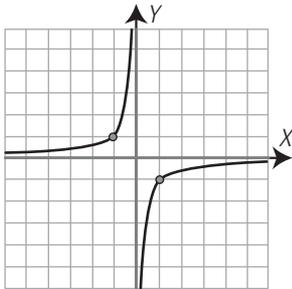




El rectángulo que tiene como vértices opuestos el punto $P(1, 5)$ y el punto de corte de las asíntotas, $O(0, 0)$ tiene de área 5. Como la hipérbola es decreciente: $k = 5 \Rightarrow y = 5/x$

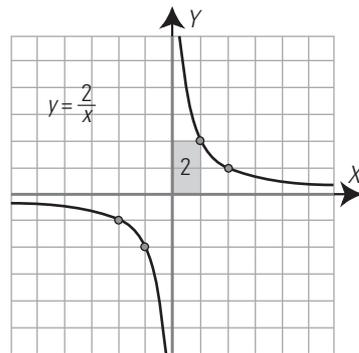


91.



El rectángulo que tiene como vértices opuestos el punto $P(1, -1)$ y el punto de corte de las asíntotas $O(0, 0)$ tiene de área 1. Como la hipérbola es creciente: $k = -1 \Rightarrow y = -1/x$

97. Dibuja la hipérbola $y = 2/x$, trasládala 3 unidades hacia la izquierda y halla la nueva ecuación.



4. TRASLACIONES DE LA HIPÉRBOLA

Halla mentalmente cuáles de las siguientes funciones son de proporcionalidad y calcula en ellas la constante de proporcionalidad:

92. $y = -2x + 1$

Función afín \Rightarrow No es de proporcionalidad.

93. $y = -3/x$

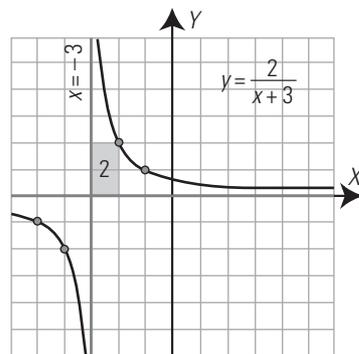
Función de proporcionalidad inversa, $k = -3$

94. $y = x/4$

Función de proporcionalidad directa, $m = 1/4$

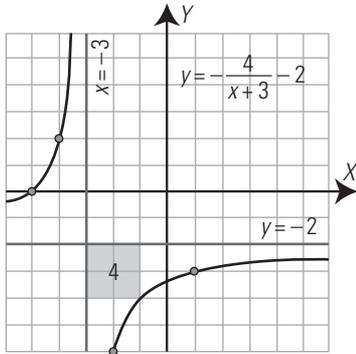
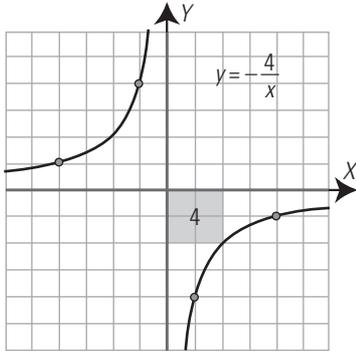
95. $y = x^2 - 6x$

Función polinómica de grado 2, no es de proporcionalidad.



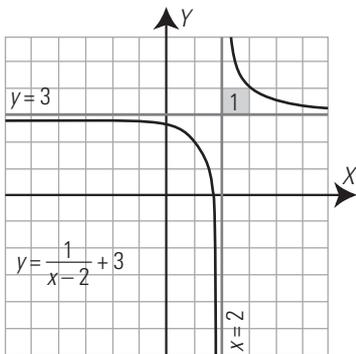
96. Dibuja la hipérbola $y = -1/x$, trasládala 2 unidades hacia arriba y calcula la nueva ecuación.

98. Dibuja la hipérbola $y = -4/x$, trasládala 2 unidades hacia abajo y 3 unidades hacia la izquierda, y obtén la nueva ecuación.



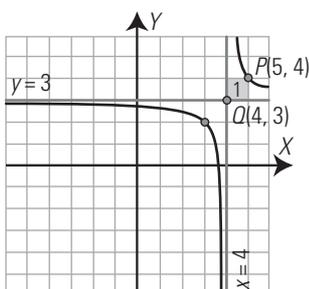
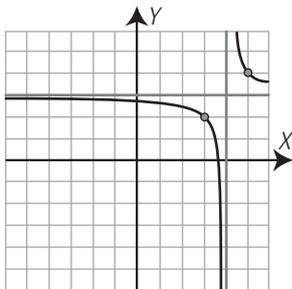
99. Dibuja la siguiente hipérbola:

$$y = \frac{1}{x-2} + 3$$



Halla la ecuación de las siguientes hipérbolas:

100.



El rectángulo que tiene como vértices opuestos el punto $P(5, 4)$ y el punto de corte de las asíntotas, $Q(4, 3)$, tiene de área 1. Como la hipérbola es decreciente: $k = 1$

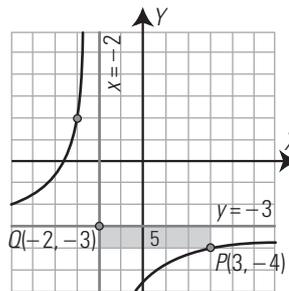
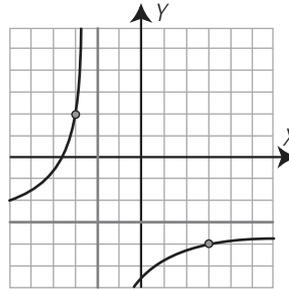
Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = 3 \Rightarrow r = 3$$

$$x = 4 \Rightarrow s = 4$$

$$\text{La ecuación es } y = \frac{1}{x-4} + 3$$

101.



El rectángulo que tiene como vértices opuestos el punto $P(3, -4)$ y el punto de corte de las asíntotas, $Q(-2, -3)$, tiene de área 5. Como la hipérbola es creciente: $k = -5$

Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = -3 \Rightarrow r = -3$$

$$x = -2 \Rightarrow s = -2$$

$$\text{La ecuación es } y = \frac{-5}{x+2} - 3$$

PARA AMPLIAR

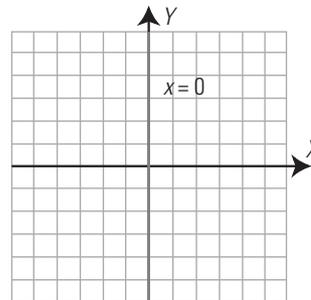
102. Representa gráficamente las siguientes ecuaciones.

¿A qué corresponde cada una de ellas?

a) $x = 0$

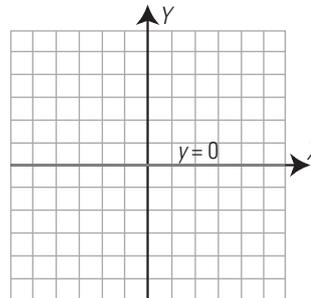
b) $y = 0$

a)



$x = 0$, es el eje de ordenadas Y

b)



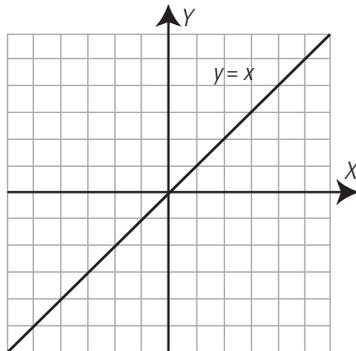
$y = 0$, es el eje de abscisas X

103. Representa gráficamente las siguientes ecuaciones. ¿Qué tipo de funciones son? Halla la pendiente de cada una de ellas.

a) $y = x$

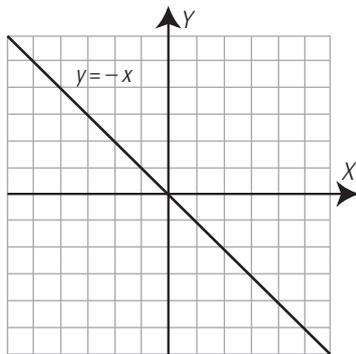
b) $y = -x$

a)



Es una función lineal o de proporcionalidad directa.
Pendiente: $m = 1$

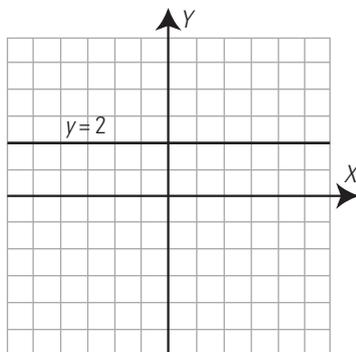
b)



Es una función lineal o de proporcionalidad directa.
Pendiente: $m = -1$

104. Representa la siguiente función definida por una tabla de valores:

x	1	-2	5	-10
y	2	2	2	2

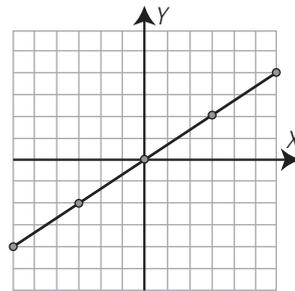


105. Halla la ecuación de la siguiente función definida por una tabla de valores y clasifica esta:

x	1	-2	5	-10
y	3	3	3	3

$y = 3 \Rightarrow$ Función constante.

106. Haz una tabla de valores para la siguiente gráfica:



x	-6	-3	0	3	6
y	-4	-2	0	2	4

Halla mentalmente la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones afines:

107. $y = x + 2$

Pendiente: $m = 1$

Ordenada en el origen: $b = 2$

108. $y = -x + 2$

Pendiente: $m = -1$

Ordenada en el origen: $b = 2$

109. $y = 5x + 1$

Pendiente: $m = 5$

Ordenada en el origen: $b = 1$

110. $y = -x/5 - 1$

Pendiente: $m = -1/5$

Ordenada en el origen: $b = -1$

Halla mentalmente la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones afines:

111. $y = 2x + 1$

Pendiente: $m = 2$

Ordenada en el origen: $b = 1$

112. $y = -x/3 + 4$

Pendiente: $m = -1/3$

Ordenada en el origen: $b = 4$

113. $y = 6x - 2$

Pendiente: $m = 6$

Ordenada en el origen: $b = -2$

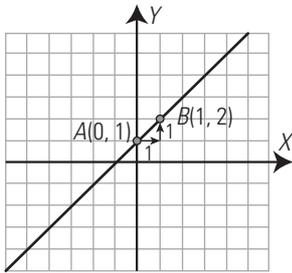
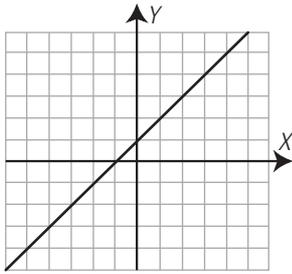
114. $y = -2x/5 - 3$

Pendiente: $m = -2/5$

Ordenada en el origen: $b = -3$

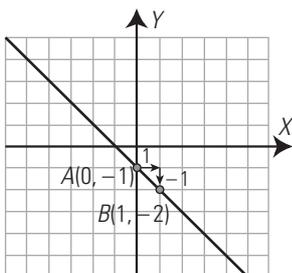
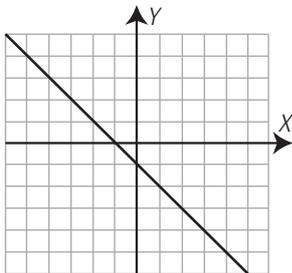
Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

115.



$A(0, 1) \Rightarrow b = 1$
 $A(0, 1)$ y $B(1, 2) \Rightarrow m = 1$
 $y = x + 1$

116.



$A(0, -1) \Rightarrow b = -1$
 $A(0, -1)$ y $B(1, -2) \Rightarrow m = -1$
 $y = -x - 1$

117. Halla la ecuación de la siguiente función definida por una tabla de valores. ¿Qué tipo de función es? ¿Es creciente o decreciente?

x	1/2	-1/2	1	-1	2	-2
y	2	-2	1	-1	1/2	-1/2

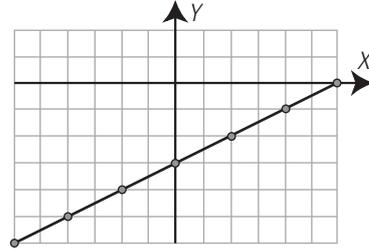
$xy = 1 \Rightarrow y = 1/x$
 Es una función de proporcionalidad inversa.
 $k = 1 > 0 \Rightarrow$ Decreciente.

118. Halla la ecuación de la siguiente función definida por una tabla de valores. ¿Qué tipo de función es? ¿Es creciente o decreciente?

x	1/2	-1/2	1	-1	2	-2
y	-2	2	-1	1	-1/2	1/2

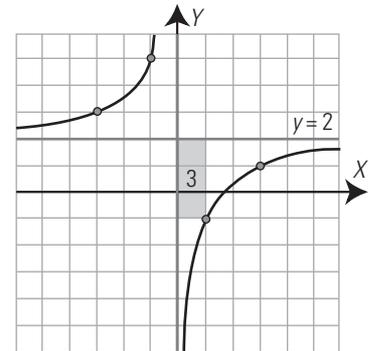
$xy = -1 \Rightarrow y = -1/x$
 Es una función de proporcionalidad inversa.
 $k = -1 < 0 \Rightarrow$ Creciente.

119. Haz una tabla de valores para la función representada en el siguiente gráfico:

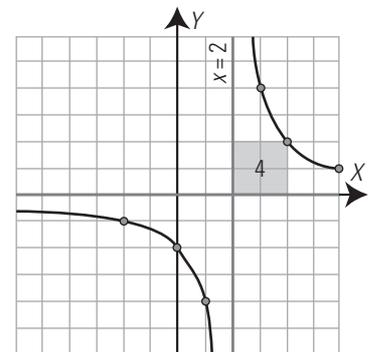


x	-6	-4	-2	0	2	4	6
y	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0

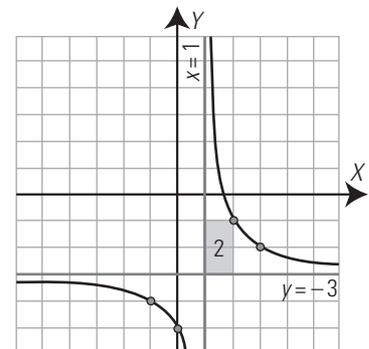
120. Dibuja la siguiente hipérbola: $y = -\frac{3}{x} + 2$



121. Dibuja la siguiente hipérbola: $y = \frac{4}{x-2}$



122. Dibuja la siguiente hipérbola: $y = \frac{2}{x-1} - 3$



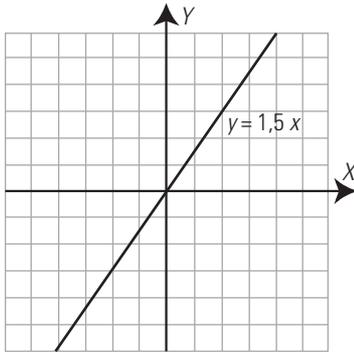
PROBLEMAS

123. Un camión circula con velocidad constante de 80 km/h. Obtén la fórmula del espacio que recorre en función del tiempo que está circulando. ¿Qué tipo de función es?

$e = 80t$
Es una función lineal o de proporcionalidad directa.

124. Una recta pasa por el origen de coordenadas $O(0, 0)$ y tiene de pendiente 1,5. Halla la ecuación de dicha recta y represéntala gráficamente.

Si pasa por el origen $O(0, 0)$ es una función lineal o de proporcionalidad directa y de pendiente $m = 1,5$. Luego: $y = 1,5x$



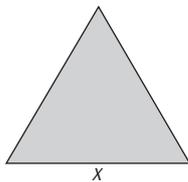
125. Una función de proporcionalidad directa pasa por el punto $P(2, 5)$. Halla la constante de proporcionalidad y la ecuación correspondiente.

$P(2, 5) \Rightarrow m = 5/2$
La función es: $y = 5x/2$

126. Escribe un enunciado verbal para una función lineal de ecuación $y = 2,5x$

Solución abierta, por ejemplo:
Un grifo vierte, de forma constante, 2,5 litros por minuto.

127. Halla la ecuación de la función que obtiene el perímetro de un triángulo equilátero en función de la medida del lado. ¿Qué tipo de función es?



$y = 3x \Rightarrow$ es una función lineal o de proporcionalidad directa.

128. En una tienda hacen un 15% de descuento en todos los artículos durante las rebajas. Escribe la ecuación que expresa el descuento en función del precio. Halla también la ecuación de la función que da el precio final que se paga en función del precio inicial. ¿Qué tipo de funciones son?

La función que expresa el descuento es:
 $y = 0,15x$
La función que expresa el precio final es:
 $y = 0,85x$
Ambas son de proporcionalidad directa.

Clasifica las siguientes ecuaciones como funciones constantes, lineales, afines o no es función. En las funciones, halla la pendiente.

129. $y = 5$

Función constante. Pendiente: $m = 0$

130. $y = -\frac{2x}{5}$

Función lineal o de proporcionalidad directa.
Pendiente: $m = -2/5$

131. $y = \frac{x}{3} - 7$

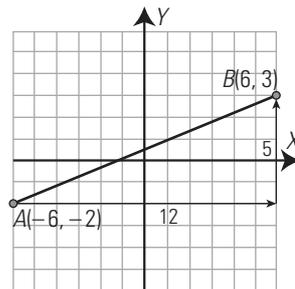
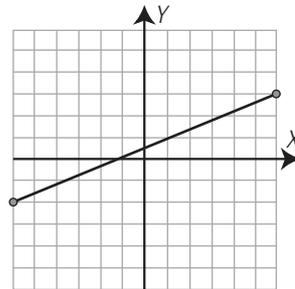
Función afín. Pendiente: $m = 1/3$

132. $x = -4$

No es función.

Halla las ecuaciones de las siguientes rectas, di cuáles son funciones y clasifica estas:

133.

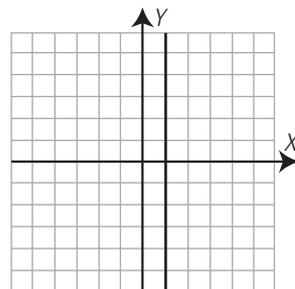


Función afín que pasa por $A(-6, -2)$ y $B(6, 3)$

$$m = \frac{3 - (-2)}{8 - (-6)} = \frac{5}{12}$$

$$y + 2 = \frac{5}{12}(x + 6) \Rightarrow y = \frac{5}{12}x + \frac{1}{2}$$

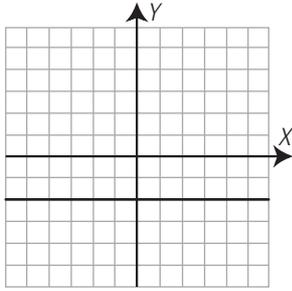
134.



No es una función.

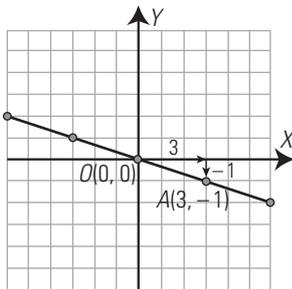
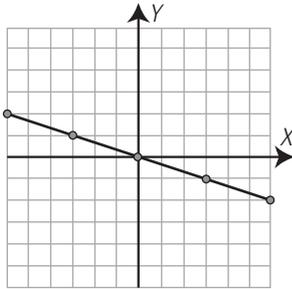
$$x = 1$$

135.



Función constante.
 $y = -2$

136.



Función lineal o de proporcionalidad directa que pasa por el origen $O(0, 0)$ y $A(3, -1)$

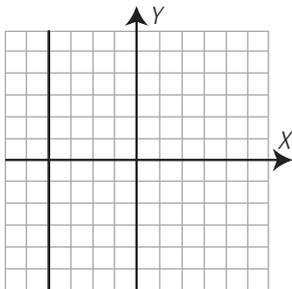
$$m = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = -\frac{x}{3}$$

137. Un taxi cobra en una tarifa y a una determinada hora 2,20 € al iniciar el viaje y 0,98 € por kilómetro. Halla la ecuación que expresa el coste en función de los kilómetros recorridos. ¿Qué tipo de función es?

Coste: y
N.º de kilómetros: x
 $y = 0,98x + 2,20$
Es una función afín.

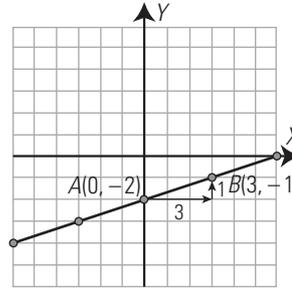
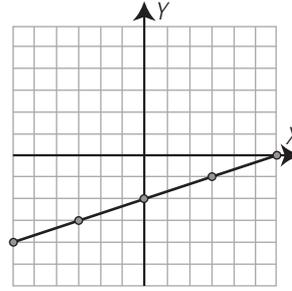
Halla las ecuaciones de las siguientes rectas, di cuáles son funciones y clasifica estas:

138.



No es una función.
 $x = -4$

139.

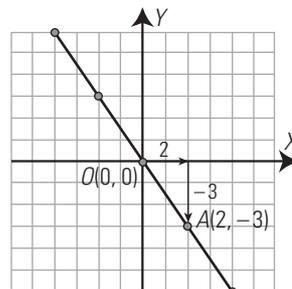
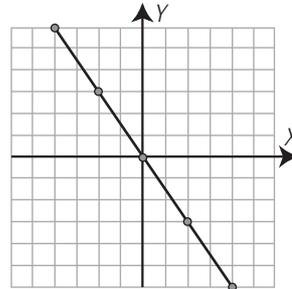


Función afín que pasa por $A(0, -2)$ y $B(3, -1)$

$$m = \frac{-1 - (-2)}{3 - 0} = \frac{1}{3}$$

$$y + 2 = \frac{1}{3}x \Rightarrow y = \frac{x}{3} - 2$$

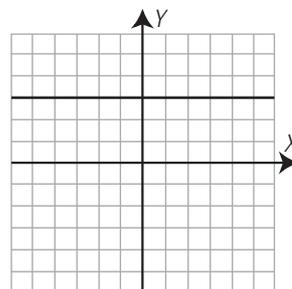
140.



Función lineal o de proporcionalidad directa que pasa por el origen $O(0, 0)$ y $A(2, -3)$

$$m = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x$$

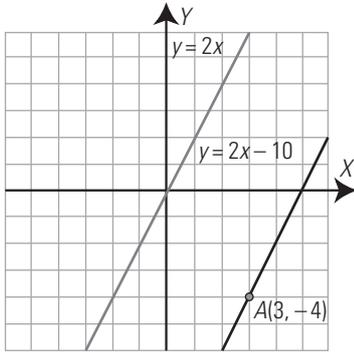
141.



Función constante.
 $y = 3$

142. Halla la ecuación de una recta que pasa por el punto $A(3, -4)$ y es paralela a la recta $y = 2x$. Representa ambas rectas.

Si es paralela a $y = 2x$ tiene su misma pendiente:
 $m = 2$
 Si pasa por el punto $A(3, -4)$, su ecuación será:
 $y + 4 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 10$

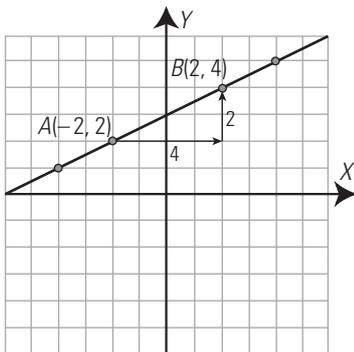


143. Escribe una expresión verbal para la siguiente ecuación: $y = 10x + 8$

Solución abierta, por ejemplo:
 Un técnico cobra 8 € por visita y a 10 € cada hora de trabajo.

144. Dada la siguiente tabla, representala en unos ejes coordenados y halla la ecuación correspondiente:

x	2	-2	4	-4
y	4	2	5	1



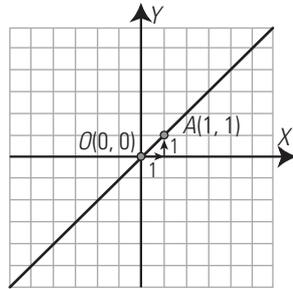
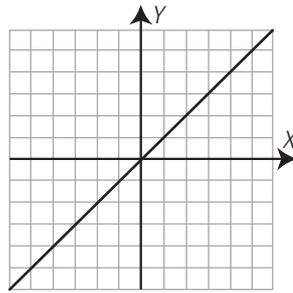
La ordenada en el origen es $b = 3$
 La pendiente es: $m = \frac{4 - 2}{2 - (-2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
 $y = \frac{x}{2} + 3$

145. Halla las ecuaciones de las siguientes funciones definidas verbalmente y clasifica estas:

- a) La entrada a un jardín botánico cuesta 3 €. Obtén el coste en función del tiempo de la visita.
 - b) La entrada a un jardín botánico cuesta 3 €. Obtén el coste en función del número de visitantes.
- a) $y = 3$
 Es una función constante.
 b) $y = 3x$
 Es una función lineal o de proporcionalidad directa.

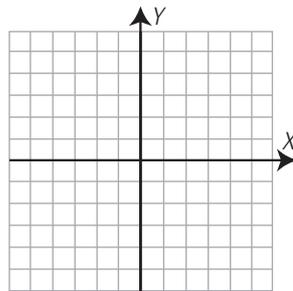
Halla las ecuaciones de las siguientes rectas, di cuáles son funciones y clasificalas:

146.



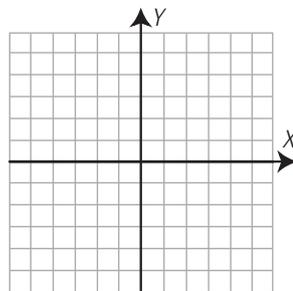
Función lineal que pasa por el origen $O(0, 0)$ y $A(1, 1)$
 $m = 1 \Rightarrow y = x$

147.



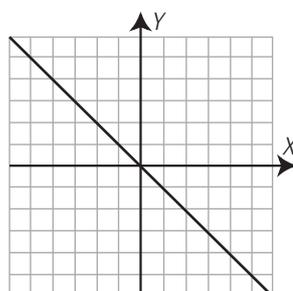
No es una función.
 $x = 0$

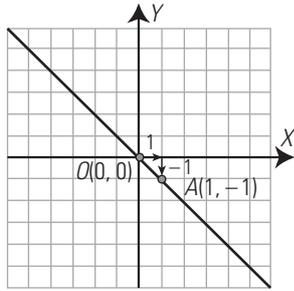
148.



Función constante.
 $y = 0$

149.





Función lineal que pasa por el origen $O(0, 0)$ y $A(1, -1)$
 $m = -1 \Rightarrow y = -x$

PARA PROFUNDIZAR

150. Los ingresos y los gastos de una empresa en millones de euros en función del número de años que lleva funcionando, vienen dados por las fórmulas:

$$I(x) = 3x \quad G(x) = 2x + 5$$

Halla la ecuación que obtiene los beneficios.

Beneficios = Ingresos - Gastos
 $B(x) = I(x) - G(x)$
 $B(x) = 3x - (2x + 5)$
 $B(x) = x - 5$

151. Un vehículo hace un trayecto de 500 km a velocidad constante. Obtén la ecuación que expresa la velocidad en función del tiempo.

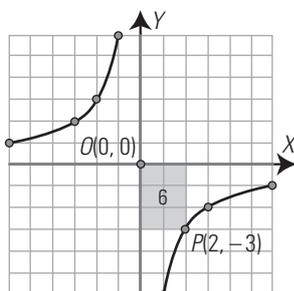
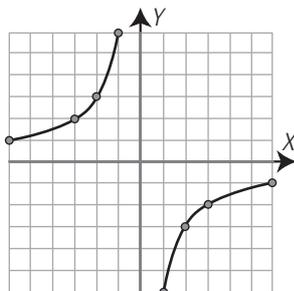
$$v = \frac{500}{t}$$

152. Una función de proporcionalidad inversa pasa por el punto $P(3, 5)$. Halla la constante de proporcionalidad y la ecuación correspondiente.

$k = 3 \cdot 5 = 15$
 La ecuación es:
 $y = \frac{15}{x}$

Halla las ecuaciones de las siguientes funciones de proporcionalidad inversa:

153.

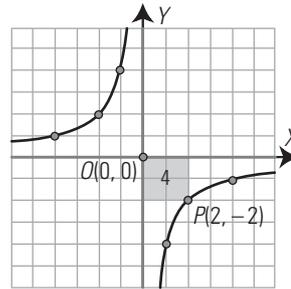
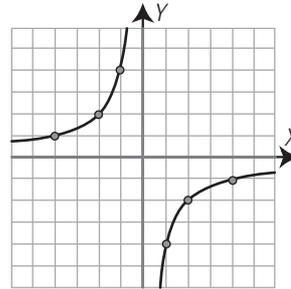


El rectángulo que tiene como vértices opuestos el punto $P(2, -3)$ y el punto de corte de las asíntotas, $O(0, 0)$, tiene de área 6. Como la hipérbola es creciente $\Rightarrow k = -6$

Las ecuaciones de las asíntotas son:
 $y = 0; x = 0 \Rightarrow$ Es de proporcionalidad inversa.

La ecuación es $y = -\frac{6}{x}$

154.



El rectángulo que tiene como vértices opuestos el punto $P(2, -2)$ y el punto de corte de las asíntotas, $O(0, 0)$, tiene de área 4. Como la hipérbola es creciente $\Rightarrow k = -4$

Las ecuaciones de las asíntotas son:
 $y = 0; x = 0 \Rightarrow$ Es de proporcionalidad inversa.

La ecuación es $y = -\frac{4}{x}$

Halla mentalmente cuáles de las siguientes funciones son de proporcionalidad y calcula en estas la constante de proporcionalidad:

155. El tiempo que se tarda en vendimiar una finca de naranjos en función del número de personas, sabiendo que 6 personas tardan 8 días.

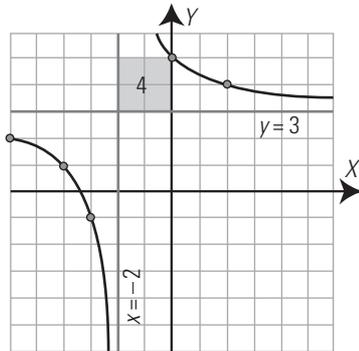
Es de proporcionalidad inversa.
 La constante de proporcionalidad es $k = 6 \cdot 8 = 48$

156. La altura de una persona está en función de su edad. Cuando nace mide 52 cm, a los 10 años mide 1,25 m, a los 20 años mide 1,75 m y a los 30 años mide 1,75 m

No es de proporcionalidad.

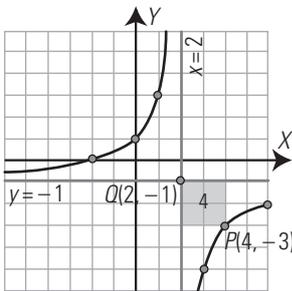
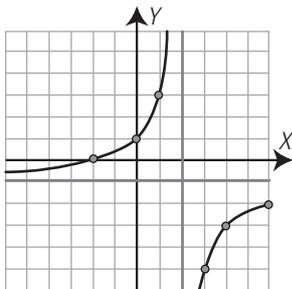
157. Dibuja la hipérbola que tiene como constante de proporcionalidad inversa $k = 4$ y cuyas asíntotas son $x = -2$ e $y = 3$

$k = 4$
 $x = -2 \Rightarrow s = -2$
 $y = 3 \Rightarrow r = 3$
 La fórmula es $y = \frac{4}{x+2} + 3$



Halla la ecuación de las siguientes hipérbolas:

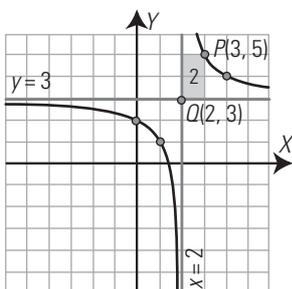
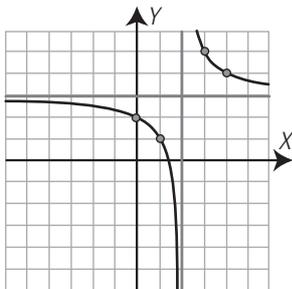
158.



El rectángulo que tiene como vértices opuestos el punto $P(4, -3)$ y el punto de corte de las asíntotas, $Q(2, -1)$, tiene de área 4. Como la hipérbola es creciente $\Rightarrow k = -4$. Las ecuaciones de las asíntotas son:
 $y = -1 \Rightarrow r = -1$
 $x = 2 \Rightarrow s = 2$

La ecuación es $y = -\frac{4}{x-2} - 1$

159.



El rectángulo que tiene como vértices opuestos el punto $P(3, 5)$ y el punto de corte de las asíntotas, $Q(2, 3)$, tiene de área 2. Como la hipérbola es decreciente $\Rightarrow k = 2$. Las ecuaciones de las asíntotas son:

$y = 3 \Rightarrow r = 3$
 $x = 2 \Rightarrow s = 2$

La ecuación es $y = \frac{2}{x-2} + 3$

160. Haz una tabla de valores para la función que obtiene el perímetro de un cuadrado en función de lo que mide el lado.

Lado: x	1	2	3	4	5
Perímetro: y	4	8	12	16	20

161. Obtén la ecuación de la función dada por la siguiente tabla y clasifícala.

x	2	-2	6	-6
y	-3	3	-9	9

La razón $\frac{y}{x} = -\frac{3}{2}$ es constante.

La función es lineal o de proporcionalidad directa:

$y = -\frac{3}{2}x$

162. El IVA reducido es de un 7%. Escribe la fórmula que da el IVA en función del precio. Halla también la ecuación de la función que expresa el precio final que se paga en función del precio inicial. ¿Qué tipo de funciones son?

Fórmula del IVA: $y = 0,07x$
 Precio final con IVA: $y = 1,07x$
 Ambas funciones son de proporcionalidad directa.

163. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-1, 4)$ y es paralela a la recta siguiente:

$y = 3x/2 + 5$

Si es paralela a $y = 3x/2 + 5$, tiene su misma pendiente $\Rightarrow m = 3/2$

Si pasa por el punto $A(-1, 4)$, su ecuación será:

$y - 4 = \frac{3}{2}(x + 1) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$

164. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 4)$ y es paralela a la recta siguiente:

$2x + y = 5$

$2x + y = 5 \Rightarrow y = -2x + 5$

Si es paralela, tiene su misma pendiente $\Rightarrow m = -2$

Si pasa por el punto $A(1, 4)$, su ecuación será:

$y - 4 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 6$

165. Un técnico de electrodomésticos cobra 9 € por ir a domicilio, más 8 € por cada hora de trabajo. Halla la ecuación que calcula el coste en función del tiempo que tarda en hacer el trabajo. ¿Qué tipo de función es?

$y = 8x + 9$
 Es una función afín.

166. Una oficina A de alquiler de coches cobra 12 € por día. Otra B cobra una cantidad fija de 20 € más 5 € por día. ¿Cuándo interesa alquilar el coche en la oficina A? ¿Y en la oficina B?

Oficina A: $y = 12x$

Oficina B: $y = 5x + 20$

Haciendo una tabla de valores para las dos oficinas se tiene:

N.º de días: x	1	2	3	4	5	6
Oficina A. Dinero: y	12	24	36	48	60	72
Oficina B. Dinero: y	25	30	35	40	45	50

Se observa que para uno o dos días la oficina A es más barata, y para tres días o más la oficina B es más barata.

167. La ecuación que relaciona la presión con el volumen de una cantidad determinada de gas a temperatura constante viene dada por la fórmula $PV = k$. Obtén la constante de proporcionalidad sabiendo que cuando la presión es de 8 atmósferas, el volumen es de 4 litros, y completa la siguiente tabla de valores:

P	1	2	4	8	16
V				4	

La constante $k = 8 \cdot 4 = 32$

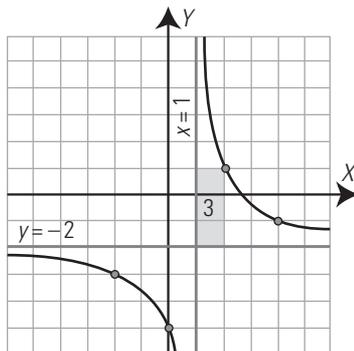
$P(\text{atm})$	1	2	4	8	16
$V(\text{litros})$	32	16	8	4	2

168. Dibuja la hipérbola en la que $k = 3$ y que tiene como asíntotas $x = 1$ e $y = -2$

$x = 1 \Rightarrow s = 1$

$y = -2 \Rightarrow r = -2$

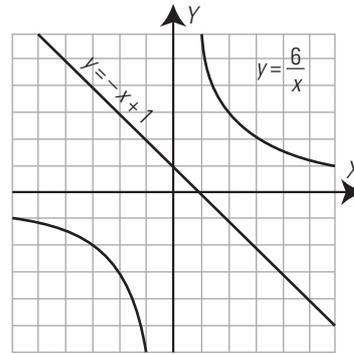
La fórmula es: $y = \frac{3}{x-1} - 2$



169. Representa gráficamente las siguientes funciones y halla sus puntos comunes:

a) $y = 6/x$

b) $y = -x + 1$



No tienen ningún punto en común.

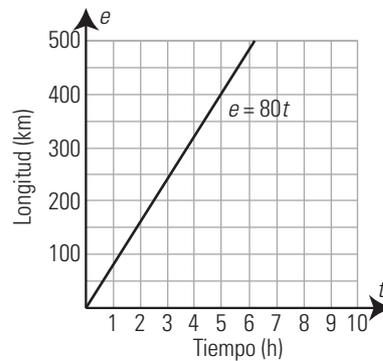
APLICA TUS COMPETENCIAS

170. Un coche circula a una velocidad constante de 80 km/h. Calcula la ecuación del espacio en función del tiempo. ¿Qué tipo de proporcionalidad es? Calcula la constante de proporcionalidad y haz la representación gráfica.

$e = 80t$

Es de proporcionalidad directa.

La constante es $m = 80$

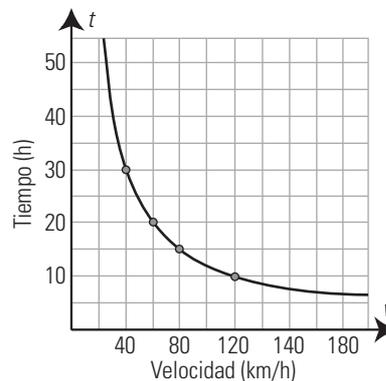


171. Un vehículo tiene que recorrer 1200 km. Calcula la ecuación del tiempo que tarda en función de la velocidad. ¿Qué tipo de proporcionalidad es? Calcula la constante de proporcionalidad y haz la representación gráfica.

$t = \frac{1200}{v}$

Es de proporcionalidad inversa.

La constante es $k = 1200$



COMPRUEBA LO QUE SABES

1. Define función lineal o de proporcionalidad directa y pon un ejemplo.

Una **función es lineal o de proporcionalidad directa** si al multiplicar la variable independiente x por un número, la variable dependiente y queda multiplicada por dicho número. Su ecuación es:

$y = mx$ ($m \neq 0$, m es la constante de proporcionalidad directa).

Su representación gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas $O(0, 0)$

Ejemplo: $y = 2x$

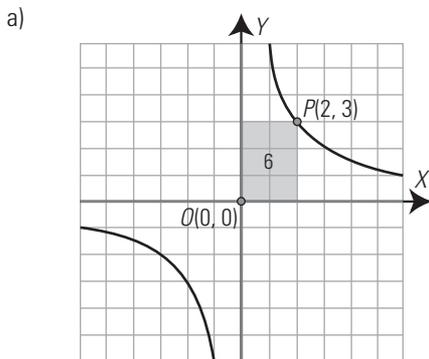
2. De las siguientes funciones, halla mentalmente cuáles son de proporcionalidad, y en estas halla la constante de proporcionalidad y di si son crecientes o decrecientes.

- a) $y = 2/x$
- b) $y = -3x + 5$
- c) $y = x^2 - 3x$
- d) $y = -1,5x$

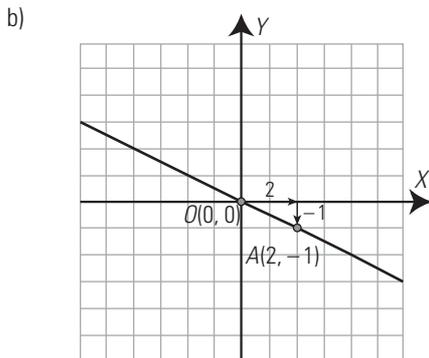
- a) Función de proporcionalidad inversa.
Constante: $k = 2 > 0 \Rightarrow$ Función decreciente.
- b) No es de proporcionalidad.
- c) No es de proporcionalidad.
- d) Función de proporcionalidad directa.
Constante: $m = -1,5 < 0 \Rightarrow$ Función decreciente.

3. Representa gráficamente las siguientes ecuaciones, di cuáles son funciones y clasifica estas:

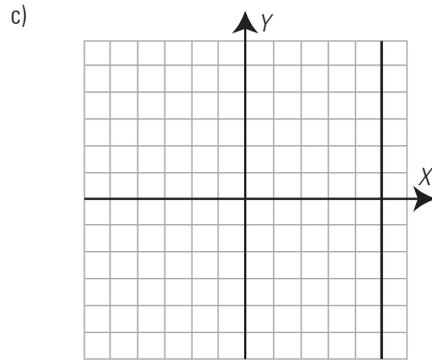
- a) $y = 6/x$
- b) $y = -x/2$
- c) $x = 5$
- d) $y = 2x - 3$



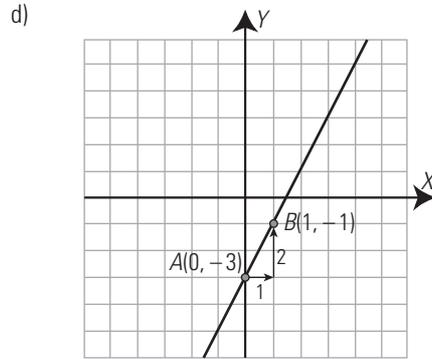
Función de proporcionalidad inversa.



Función de proporcionalidad directa.

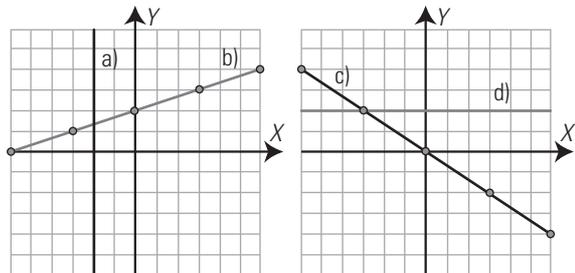


No es función.



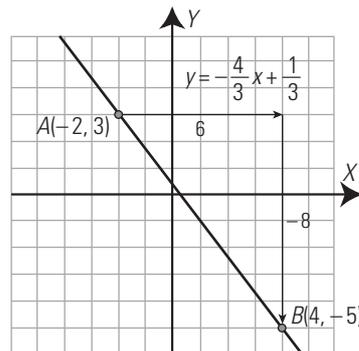
Función afín.

4. Halla las ecuaciones de las siguientes rectas, di cuáles son funciones y clasifica estas:



- a) $x = -2$, no es función.
- b) $y = x/3 + 2$, es una función afín.
- c) $y = -2x/3$, es una función lineal o de proporcionalidad directa.
- d) $y = 2$, es una función constante.

5. Representa la recta que pasa por los puntos $A(-2, 3)$ y $B(4, -5)$. Halla su ecuación.



Pendiente: $A(-2, 3), B(4, -5) \Rightarrow$

$$m = \frac{-5 - 3}{4 - (-2)} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

Punto: $A(-2, 3)$

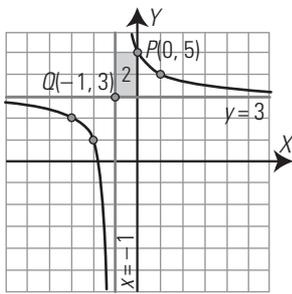
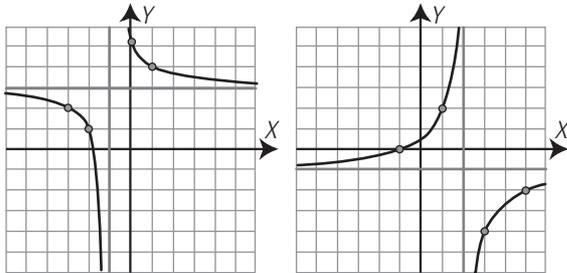
$$y - 3 = -\frac{4}{3}(x + 2) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$$

6. Un electricista cobra 10 € por ir a domicilio, más 5 € por cada hora de trabajo. Halla la ecuación que calcula lo que cobra en función del tiempo que tarda en hacer el trabajo. ¿Qué tipo de función es? Escribe sus características fundamentales.

$$y = 5x + 10$$

Es una función afín. Es una recta de pendiente 5, creciente y de ordenada en el origen 10

7. Halla la ecuación de las siguientes hipérbolas:



a) El rectángulo que tiene como vértices opuestos el punto $P(0, 5)$ y el punto de corte de las asíntotas, $Q(-1, 3)$, tiene de área 2.

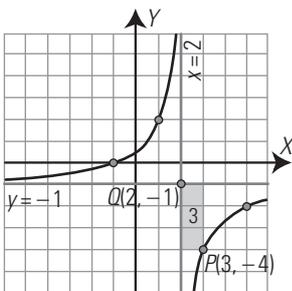
Como la hipérbola es decreciente $\Rightarrow k = 2$

Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = 3 \Rightarrow r = 3$$

$$x = -1 \Rightarrow s = -1$$

$$\text{La ecuación es } y = \frac{2}{x+1} + 3$$



b) El rectángulo que tiene como vértices opuestos el punto $P(3, -4)$ y el punto de corte de las asíntotas, $Q(2, -1)$, tiene de área 3.

Como la hipérbola es creciente $\Rightarrow k = -3$

Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = -1 \Rightarrow r = -1$$

$$x = 2 \Rightarrow s = 2$$

$$\text{La ecuación es } y = -\frac{3}{x-2} - 1$$

8. Seis personas tardan ocho días en hacer un trabajo. Obtén el tiempo que se tarda en hacer el mismo trabajo en función del número de personas. ¿Qué tipo de función es? Escribe sus características fundamentales.

$$k = 6 \cdot 8 = 48$$

$$y = 48/x$$

Es una función de proporcionalidad inversa, de constante

$k = 48$ y decreciente.

WINDOWS/LINUX

PASO A PASO

172. Representa la función: $y = \frac{3}{2}x$

Resuelto en el libro del alumnado.

173. Representa la función:

$$y = -2x + 3$$

Clasifícala y halla la pendiente y la ordenada en el origen.

Resuelto en el libro del alumnado.

174. Representa la función:

$$y = \frac{3}{x-2} + 1$$

Resuelto en el libro del alumnado.

175. Dos personas tardan tres días en hacer un trabajo. Calcula el tiempo que tardan en función del número de personas que trabajan. Representa la función ampliando a los números negativos. Clasifica la función y halla la constante de proporcionalidad.

Resuelto en el libro del alumnado.

PRACTICA

176. Representa gráficamente las siguientes ecuaciones, di cuáles son funciones y clasifícalas. Halla la pendiente de las funciones y di si son crecientes o decrecientes:

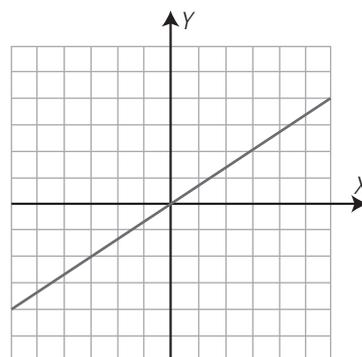
a) $y = \frac{2x}{3}$

b) $y = 4$

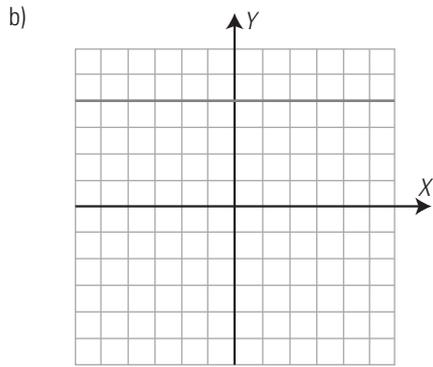
c) $x = -5$

d) $y = -\frac{x}{5} + 2$

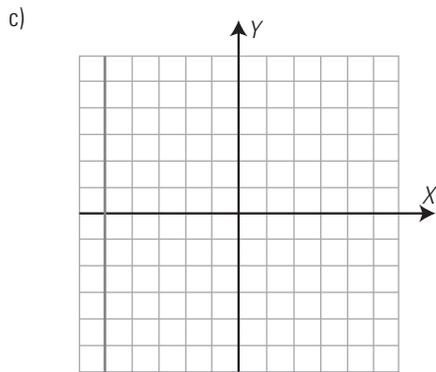
a)



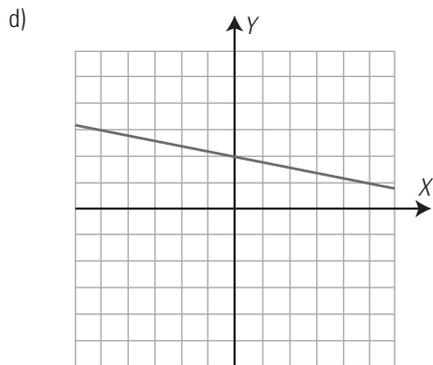
Función lineal.
 Pendiente: $m = 2/3$
 Creciente.



Función constante.
 Pendiente: $m = 0$



No es función.

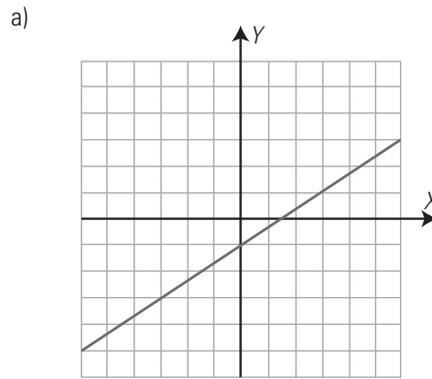


Función afín.
 Pendiente: $m = -1/5$
 Decreciente.

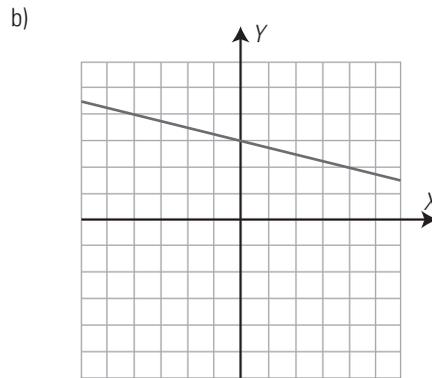
177. Dibuja la gráfica de las funciones afines siguientes, halla en cada una de ellas la pendiente y su ordenada en el origen. ¿Cuál es creciente? ¿Cuál es decreciente?

a) $y = \frac{2x}{3} - 1$

b) $y = -\frac{x}{4} + 3$



Pendiente: $m = 2/3$
 Ordenada en el origen: $b = -1$
 Creciente.



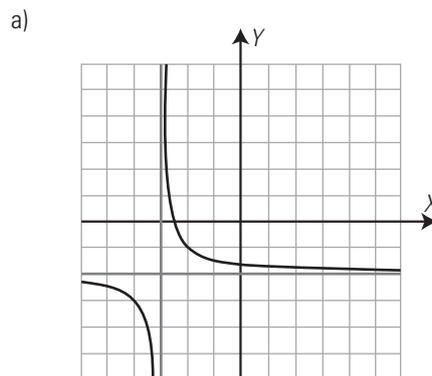
Pendiente: $m = -1/4$
 Ordenada en el origen: $b = 3$
 Decreciente.

178. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = \frac{1}{x+3} - 2$

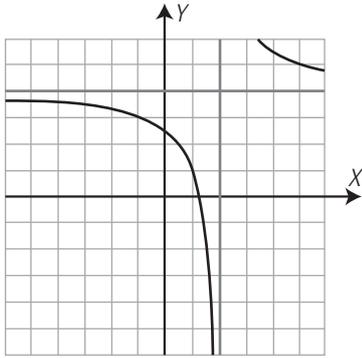
b) $y = \frac{3}{x-2} + 4$

Calcula el valor de k , estudia el crecimiento, halla las asíntotas y represéntalas.



$k = 1 > 0 \Rightarrow$ Decreciente.
 Asíntotas: $y = -2, x = -3$

b)



$k = 3 > 0 \Rightarrow$ Decreciente.
Asíntotas: $y = 4$, $x = 2$

179. Representa las siguientes funciones, di cuáles son de proporcionalidad directa o inversa y halla en estas la constante de proporcionalidad:

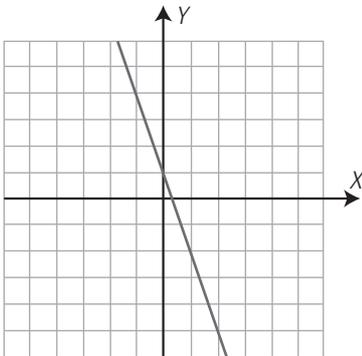
a) $y = -3x + 1$

b) $y = -\frac{4}{x}$

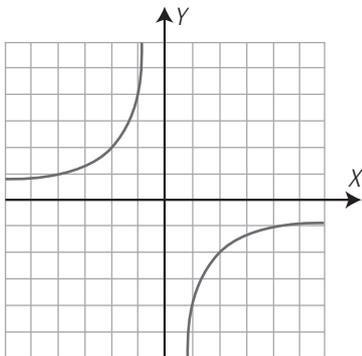
c) $y = \frac{x}{5}$

d) $y = x^2 - 3x$

a)

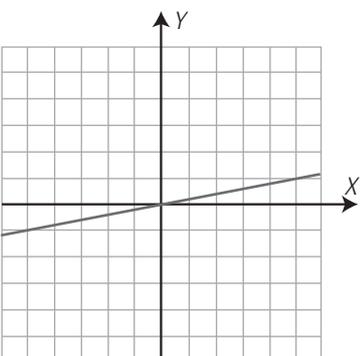


b)



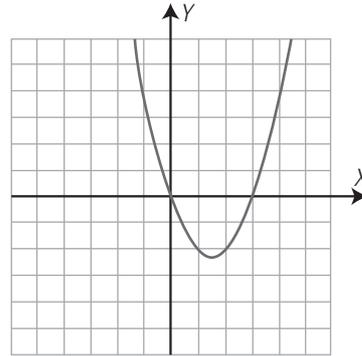
Función de proporcionalidad inversa.
Constante: $k = -4$

c)



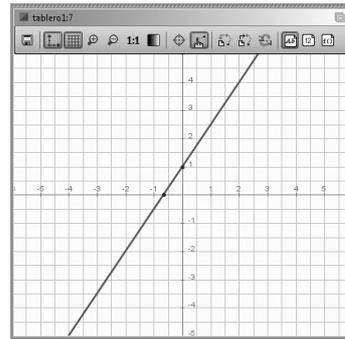
Función de proporcionalidad directa.
Constante: $m = 1/5$

d)



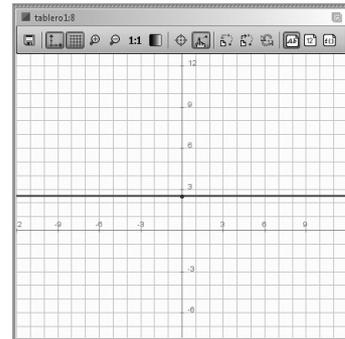
Clasifica las siguientes funciones y halla mediante *ensayo-acierto* su fórmula:

180.



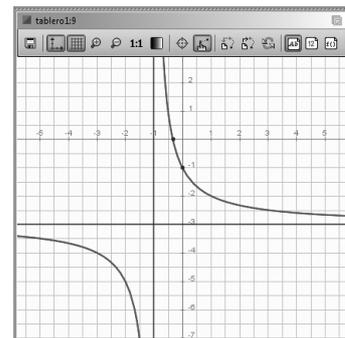
Función afín.
Fórmula $y = \frac{3}{2}x + 1$

181.



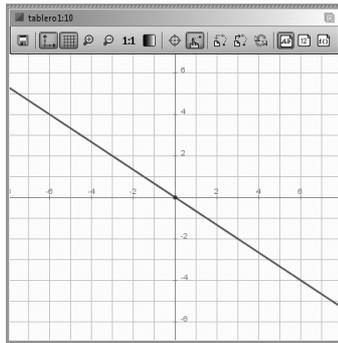
Función constante.
Fórmula $y = \frac{5}{2}$, o bien $y = 2,5$

182.



Función racional.
Fórmula $y = \frac{2}{x+1} - 3$

183.

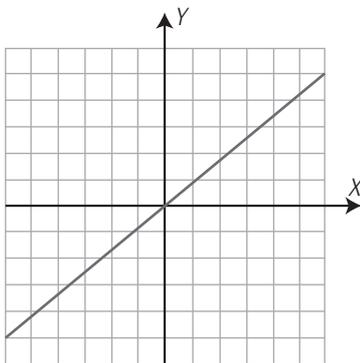


Función lineal.

Fórmula $y = -\frac{2}{3}x$

184. Halla la fórmula para calcular el coste de la leche si un litro cuesta 0,85 € y represéntala gráficamente. ¿Qué tipo de función es? Halla la pendiente.

$y = 0,85x$



Función lineal.

Pendiente: $m = 0,85$

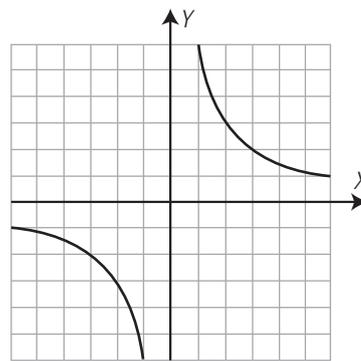
En el contexto del problema, la función solo tiene sentido para $x > 0$

185. Una persona tiene que recorrer 6 km a velocidad constante. Calcula el tiempo que tarda en hacer el recorrido en función de la velocidad. Representa la función gráficamente. ¿Qué tipo de función es? Halla la constante de proporcionalidad.

El tiempo que tarda en hacer el recorrido en función de la velocidad es:

$t = \frac{6}{v}$

Gráfica:



Es una función de proporcionalidad inversa.

La constante de proporcionalidad es:

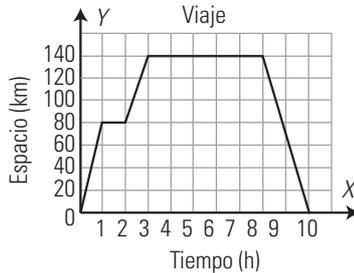
$k = 6$

Evaluación de diagnóstico

BLOQUE III: FUNCIONES Y GRÁFICAS

Resuelve los siguientes ejercicios:

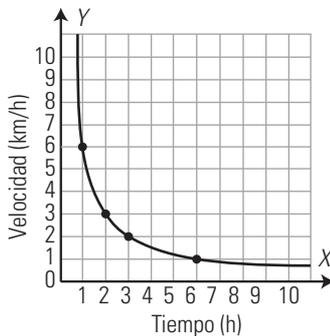
1. La siguiente gráfica representa un viaje en autobús de un grupo de estudiantes:



- a) ¿Qué se representa en cada eje y en qué unidades?
- b) ¿A cuántos kilómetros estaba el lugar que visitaron?
- c) ¿Cuánto tiempo duró la visita al lugar?
- d) ¿Hubo alguna parada a la ida? ¿Y a la vuelta?
- e) ¿Cuánto duró el viaje completo?

- a) En el eje X se representa el tiempo en horas y en el eje Y la longitud en kilómetros.
- b) A 140 km
- c) 5 h
- d) A la ida hubo una parada de 1 h de duración. A la vuelta no hubo paradas.
- e) 10 h

2. La velocidad constante a la que una persona recorre una distancia de 6 km viene expresada en función del tiempo por la siguiente gráfica:



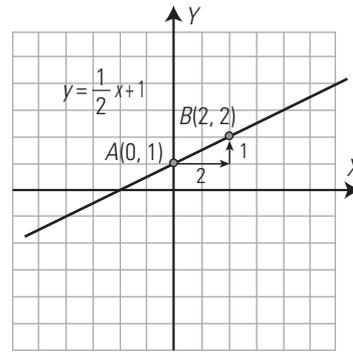
- a) ¿Es una función creciente o decreciente?
- b) ¿Cuál es la velocidad cuando $t=1$ hora? ¿Y cuando $t=2$ horas?
- c) Al aumentar el tiempo, ¿a qué valor tiende la velocidad?

- a) Es una función decreciente.
- b) 6 km/h; 3 km/h
- c) A cero.

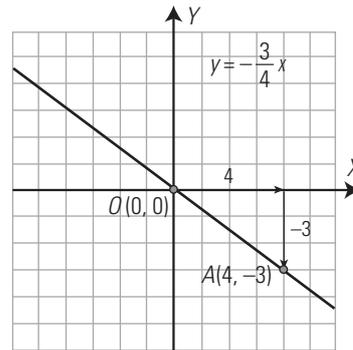
3. Clasifica las siguientes funciones y dibuja sus gráficas:

- a) $y = \frac{1}{2}x + 1$
- b) $y = -\frac{3}{4}x$

a) Función afín. Pendiente = 1/2, ordenada en el origen 1

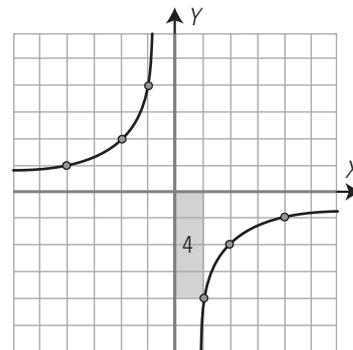


b) Función lineal. Pendiente = -3/4



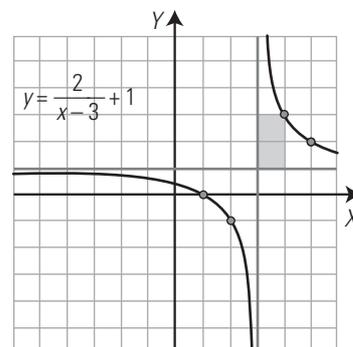
4. Dibuja la gráfica de la siguiente función:

$$y = -\frac{4}{x}$$

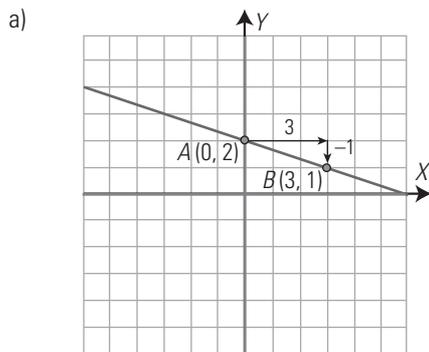
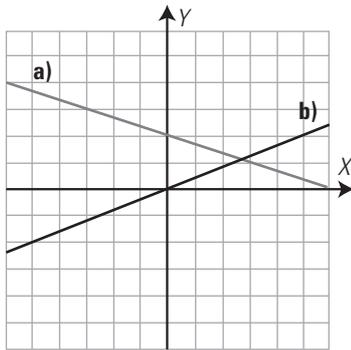


5. Dibuja la gráfica de la siguiente función:

$$y = \frac{2}{x-3} + 1$$

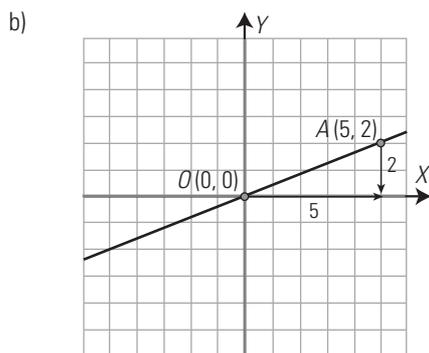


6. Halla las ecuaciones de las siguientes rectas y clasifícalas.



$$y = -\frac{1}{3}x + 2$$

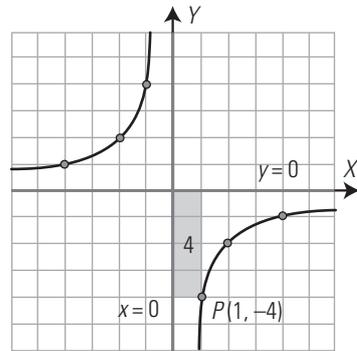
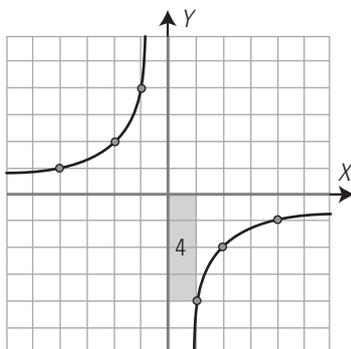
Función afín.



$$y = \frac{2}{5}x$$

Función lineal.

7. Halla la ecuación de la siguiente hipérbola:



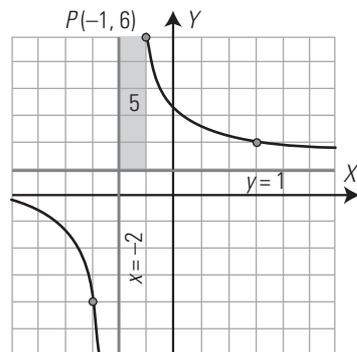
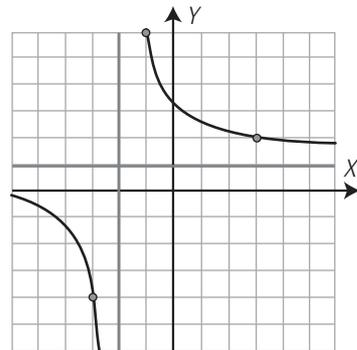
El rectángulo tiene como vértices opuestos el punto de corte de las asíntotas y el punto $P(1, -4)$, tiene de área 4 unidades cuadradas. La hipérbola es creciente $\Rightarrow k = -4$

Asíntotas: $y = 0 \Rightarrow r = 0$; $x = 0 \Rightarrow s = 0$

La ecuación es:

$$y = \frac{k}{x-s} + r \Rightarrow y = -\frac{4}{x}$$

8. Halla la ecuación de la siguiente hipérbola:



El rectángulo tiene como vértices opuestos el punto de corte de las asíntotas y el punto $P(-1, 6)$, tiene de área 5 unidades cuadradas. La hipérbola es decreciente $\Rightarrow k = 5$

Asíntotas: $y = 1 \Rightarrow r = 1$; $x = -2 \Rightarrow s = -2$

La ecuación es:

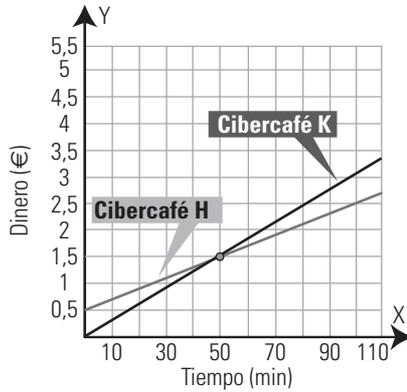
$$y = \frac{k}{x-s} + r \Rightarrow y = -\frac{5}{x+2} + 1$$

9. Pedro tiene al lado de casa dos cibercafés, H y K, para conectarse a Internet. En el cibercafé H cobran 0,5 € por el enganche a Internet y 0,02 € por minuto de conexión. En el K no cobran por el enganche, pero cobran 0,03 € por minuto de conexión.

a) Pedro piensa estar 100 minutos utilizando Internet. ¿Dónde irá para que le salga más barato? Justifica con cálculos tu respuesta.

b) Pedro se da cuenta de que H sale, a la larga, más barato. ¿A partir de qué tiempo de utilización conviene entrar en H?

- a) Sea x el tiempo en minutos.
 Sea y el dinero que se paga.
 Cibercafé H: $y = 0,02x + 0,5$
 Cibercafé K: $y = 0,03x$



En 100 minutos se tiene:

Cibercafé H: $y = 0,02 \cdot 100 + 0,5 = 2,5 \text{ €}$

Cibercafé K: $y = 0,03 \cdot 100 = 3 \text{ €}$

- b) En la gráfica se observa que el cibercafé H sale más barato a partir de los 50 minutos.

10. Este gráfico muestra cómo varía la velocidad de un coche de carreras a lo largo de una pista llana de 3 km durante su segunda vuelta.



Pregunta 1.

¿Cuál es la distancia aproximada desde la línea de salida hasta el comienzo del tramo recto más largo que hay en la pista?

- a) 0,5 km b) 1,5 km c) 2,3 km d) 2,6 km

Pregunta 2.

¿Dónde alcanzó el coche la velocidad más baja durante la segunda vuelta?

- a) En la línea de salida.
 b) Aproximadamente en el kilómetro 0,8
 c) Aproximadamente en el kilómetro 1,3
 d) A mitad del recorrido.

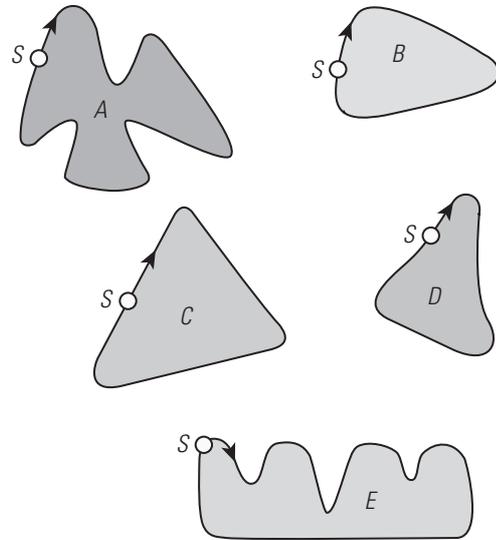
Pregunta 3.

¿Qué se puede decir sobre la velocidad del coche entre el kilómetro 2,6 y el 2,8?

- a) La velocidad del coche permanece constante.
 b) La velocidad del coche es creciente.
 c) La velocidad del coche es decreciente.
 d) La velocidad del coche no se puede hallar basándose en este gráfico.

Pregunta 4.

Aquí están dibujadas cinco pistas:



¿En cuál de estas pistas se condujo el coche para producir el gráfico de velocidad mostrado anteriormente?

1. b).
 2. c).
 3. b).
 4. La pista B.

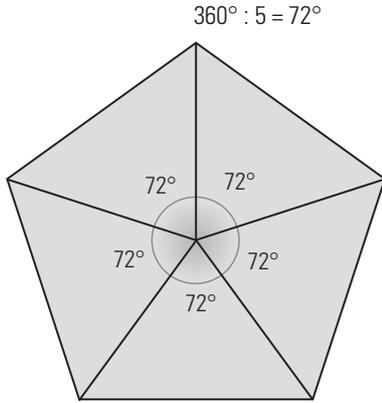
SOLUCIONARIO BLOQUE IV.
GEOMETRÍA

10. Teoremas de Tales y Pitágoras

1. LUGARES GEOMÉTRICOS Y ÁNGULOS

PIENSA Y CALCULA

¿Cuánto mide cada uno de los cinco ángulos centrales de un pentágono regular?



CARNÉ CALCULISTA

Desarrolla: $\left(\frac{x}{2} + 4\right)\left(\frac{x}{2} - 4\right) = \frac{x^2}{4} - 16$

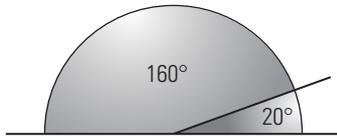
Factoriza: $9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2$

APLICA LA TEORÍA

1. Define circunferencia como un lugar geométrico.

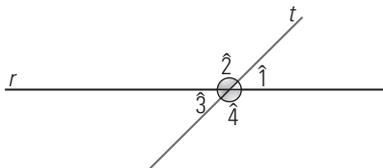
Una **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan o están a igual distancia de un punto fijo llamado centro.

2. Dibuja un ángulo de 20° y su suplementario. ¿Cuánto vale?



Vale $180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$

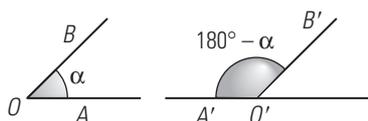
3. Dibuja dos rectas secantes y los ángulos que forman, di cuáles son iguales y cuáles suplementarios.



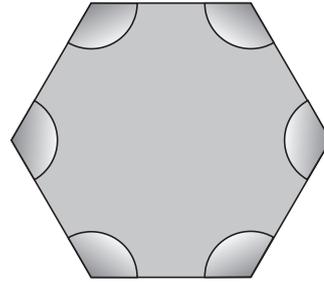
$\hat{1} = \hat{3}$ y $\hat{2} = \hat{4}$

Cada uno de los impares es suplementario de cada uno de los pares.

4. Dibuja dos ángulos de lados paralelos y que sean suplementarios.



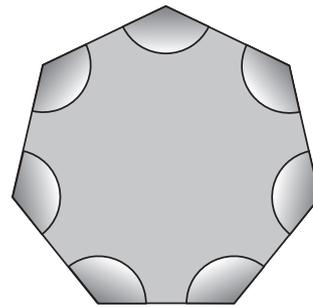
5. Dibuja un hexágono y todos sus ángulos. ¿Cuánto suman entre todos ellos?



$S = (n - 2) \cdot 180^\circ$

$S = (6 - 2) \cdot 180^\circ = 4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$

6. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos de un heptágono regular?



$S = (n - 2) \cdot 180^\circ$

$S = (7 - 2) \cdot 180^\circ = 5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$

Cada uno de los siete ángulos mide $900^\circ : 7 = 128^\circ 34' 17''$

2. TEOREMA DE THALES

PIENSA Y CALCULA

Dicen que Pitágoras para medir la altura de la pirámide Keops colocó un palo de un metro, en el centro de una circunferencia de radio 1 m y esperó hasta que la sombra midiese exactamente 1 m, en ese instante la sombra de la pirámide media 147 m. ¿Cuánto mide de alto la pirámide?

La pirámide de Keops mide 147 m porque en ese momento la altura es igual a la longitud de la sombra.

CARNÉ CALCULISTA

Resuelve la ecuación: $\frac{x}{2} - \frac{3x - 5}{6} = 1 - \frac{2x - 1}{4}$

$x = 5/6$

APLICA LA TEORÍA

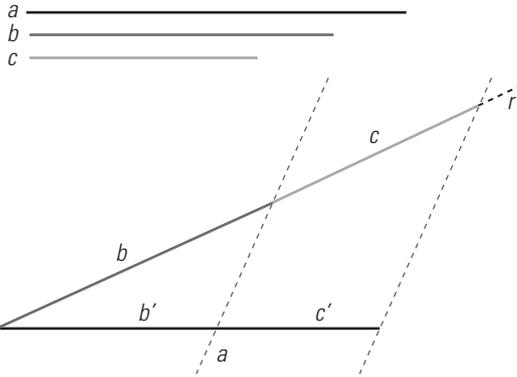
7. Calcula la altura de un molino eólico, sabiendo que su sombra mide 25 m y que en ese mismo instante un objeto de 1,5 m proyecta una sombra de 1,2 m

Se aplica el teorema de Tales.

$$\frac{\text{Sombra del objeto}}{\text{Altura del objeto}} = \frac{\text{Sombra del molino}}{\text{Altura del molino}}$$

$$\frac{1,2}{1,5} = \frac{25}{x} \Rightarrow x = \frac{1,5 \cdot 25}{1,2} = 31,25 \text{ m}$$

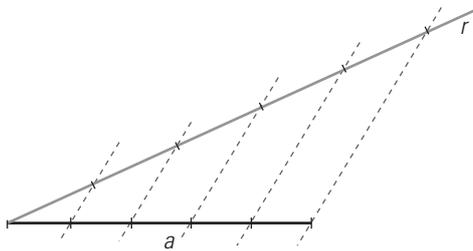
8. Dibuja en tu cuaderno tres segmentos de medidas 5 cm, 4 cm y 3 cm. Divide el primer segmento en partes proporcionales a los otros dos.



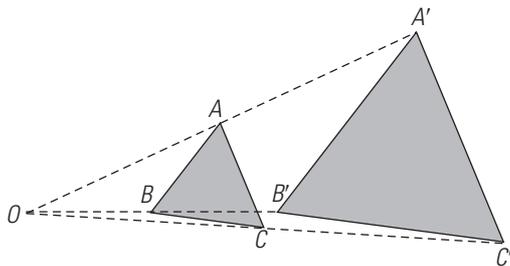
9. ¿Por qué los triángulos equiláteros son siempre semejantes?

Porque tienen los ángulos siempre iguales y cada uno de ellos mide $180^\circ : 3 = 60^\circ$

10. Dibuja en tu cuaderno un segmento de 4 cm y divídelo en 5 partes iguales.



11. Dibuja en tu cuaderno un triángulo equilátero de 1,5 cm de lado. Dibuja otro semejante de razón de semejanza dos.



12. Sara está en una foto con su padre Ismael; en la foto Sara mide 3 cm e Ismael 3,5 cm. Si en la realidad Ismael mide 1,75 m, ¿cuánto mide Sara?

Las personas y la foto son figuras semejantes.

$$\frac{3,5}{175} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 175}{3,5} = 150 \text{ cm} = 1,50 \text{ m}$$

3. TEOREMA DE PITÁGORAS

PIENSA Y CALCULA

Calcula tres números enteros positivos menores que 6 de forma que el cuadrado del mayor sea igual a la suma de los cuadrados de los otros dos.

$$3, 4 \text{ y } 5 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + 4^2$$

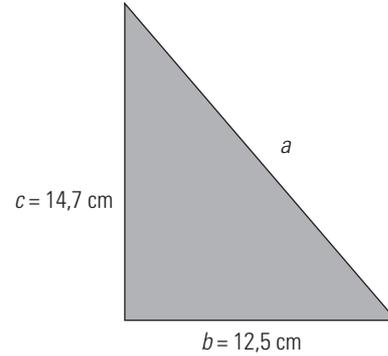
CARNÉ CALCULISTA

Resuelve la ecuación: $\frac{x+2}{3} \cdot \frac{x-2}{3} = 5$

$$x_1 = -7, x_2 = 7$$

APLICA LA TEORÍA

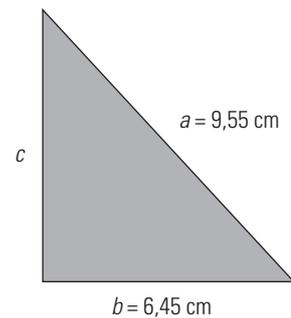
13. Halla la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que los catetos miden 12,5 cm y 14,7 cm



$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 12,5^2 + 14,7^2 = 372,34$$

$$a = \sqrt{372,34} = 19,30 \text{ cm}$$

14. En un triángulo rectángulo se conoce un cateto, que mide 6,45 cm, y la hipotenusa, que mide 9,55 cm. Halla cuánto mide el otro cateto.



$$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow 6,45^2 + c^2 = 9,55^2 \Rightarrow c^2 = 49,6$$

$$c = \sqrt{49,6} = 7,04 \text{ cm}$$

15. Halla una terna pitagórica en la que el número mayor es 13

$$5, 12 \text{ y } 13, \text{ pues } 5^2 + 12^2 = 13^2, 25 + 144 = 169$$

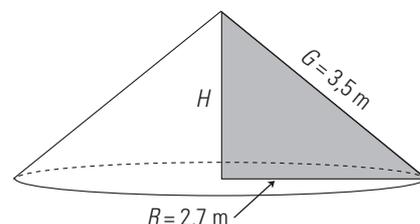
16. Los lados de un triángulo miden 4 m, 5 m y 6 m. ¿Qué clase de triángulo es?

$$6^2 = 36$$

$$4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$$

Como $6^2 < 4^2 + 5^2 \Rightarrow$ El triángulo es acutángulo.

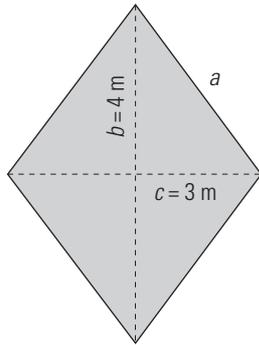
17. Halla la altura de un cono en el que el radio de la base mide 2,7 m y la generatriz, 3,5 m



$$R^2 + H^2 = G^2 \Rightarrow 2,7^2 + H^2 = 3,5^2 \Rightarrow H^2 = 4,96$$

$$H = \sqrt{4,96} = 2,23 \text{ m}$$

18. Halla el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 8 m y 6 m

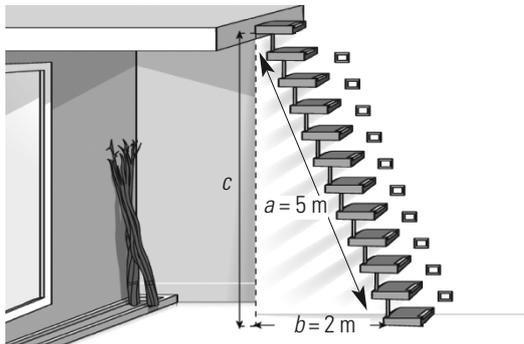


$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$$a = \sqrt{25} = 5 \text{ m}$$

Perímetro del rombo $4 \cdot 5 = 20 \text{ m}$

19. ¿A qué altura se llega con una escalera de 5 m colocando la base a 2 m de la pared?



$$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow 2^2 + c^2 = 5^2 \Rightarrow c^2 = 5,25$$

$$c = \sqrt{2,25} = 2,29$$

4. ÁREA DE FIGURAS PLANAS

PIENSA Y CALCULA

Halla mentalmente las áreas de un cuadrado de 7 m de lado y de un rectángulo de 9 m de largo y 5 m de alto.

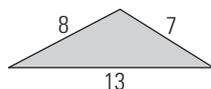
Área del cuadrado: 49 m^2
 Área del rectángulo: 45 m^2

CARNÉ CALCULISTA

$$\left. \begin{array}{l} 5x - 2y = 17 \\ 3x + 4y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 3, y = -1$$

APLICA LA TEORÍA

20. Calcula el área de un triángulo cuyos lados miden 7 m, 8 m y 13 m



Se aplica la fórmula de Herón:

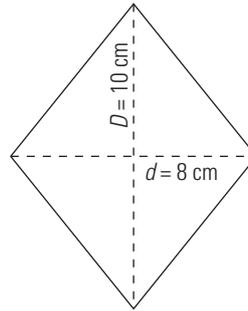
$$\text{Perímetro} = 28 \text{ m} \Rightarrow p = 14$$

Área:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$A = \sqrt{14 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1} = 24,25 \text{ m}^2$$

21. Calcula mentalmente el área de un rombo cuyas diagonales miden 8 cm y 10 cm

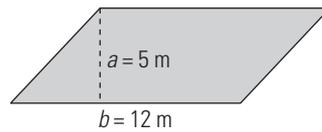


Área:

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

$$A = \frac{8 \cdot 10}{2} = 40 \text{ cm}^2$$

22. Calcula mentalmente el área de un romboide en el que la base mide 12 m y la altura tiene 5 m

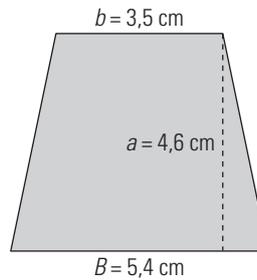


Área:

$$A = b \cdot a$$

$$A = 12 \cdot 5 = 60 \text{ m}^2$$

23. Calcula el área de un trapecio en el que las bases miden 5,4 cm y 3,5 cm y la altura tiene 4,6 cm

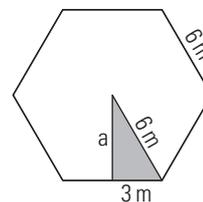


Área:

$$A = \frac{B + b}{2} \cdot a$$

$$A = \frac{5,4 + 3,6}{2} \cdot 4,6 = 20,47 \text{ cm}^2$$

24. Calcula el área de un hexágono regular de lado 6 m



Aplicando el teorema de Pitágoras se halla la apotema.

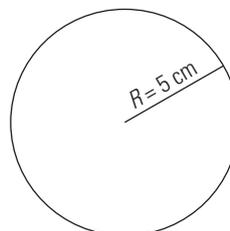
$$a = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 5,2 \text{ m}$$

Área:

$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

$$A = 6 \cdot 6 \cdot 5,2 : 2 = 93,6 \text{ m}^2$$

25. Calcula la longitud de una circunferencia cuyo radio mide 5 cm

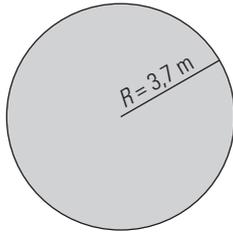


Longitud:

$$L = 2\pi R$$

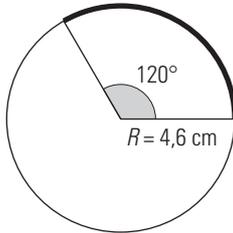
$$L = 2 \cdot \pi \cdot 5 = 31,40 \text{ cm}$$

26. Calcula el área de un círculo cuyo radio mide 3,7 m



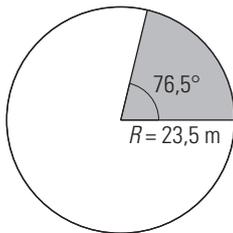
Área:
 $A = \pi R^2$
 $A = \pi \cdot 3,7^2 = 43,01 \text{ m}^2$

27. Calcula la longitud de un arco de 4,6 cm de radio y cuya amplitud es de 120°



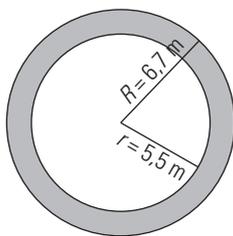
Longitud:
 $L = \frac{2\pi R}{360} \cdot n^\circ$
 $L = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4,6}{360} \cdot 120^\circ = 9,63 \text{ cm}$

28. Calcula el área de un sector circular de 23,5 m de radio y cuya amplitud es de 76,5°



Área:
 $A = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ$
 $A = \frac{\pi \cdot 23,5^2}{360^\circ} \cdot 76,5^\circ = 368,68 \text{ m}^2$

29. Calcula el área de una corona circular cuyos radios miden: $R = 6,7 \text{ m}$ y $r = 5,5 \text{ m}$

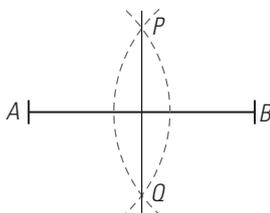


Área:
 $A = \pi(R^2 - r^2)$
 $A = \pi(6,7^2 - 5,5^2) = 45,99 \text{ m}^2$

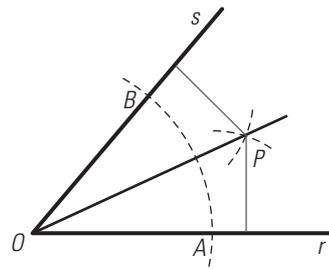
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. LUGARES GEOMÉTRICOS Y ÁNGULOS

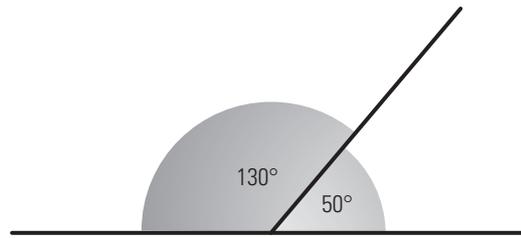
30. Dibuja un segmento de 3 cm y halla su mediatriz.



31. Dibuja un ángulo de 50° y halla su bisectriz.

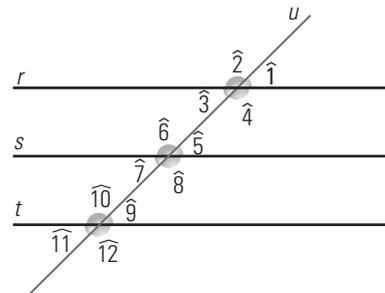


32. Dibuja un ángulo de 50° y su suplementario. ¿Cuánto vale?



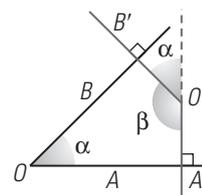
Vale: $180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

33. Dibuja tres rectas paralelas cortadas por una secante e indica cuáles de los ángulos que se forman son iguales.

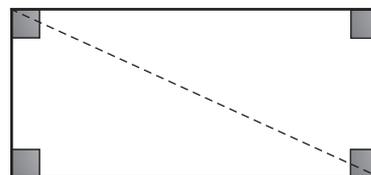


$\hat{1} = \hat{3} = \hat{5} = \hat{7} = \hat{9} = \hat{11}$ y $\hat{2} = \hat{4} = \hat{6} = \hat{8} = \hat{10} = \hat{12}$

34. Dibuja dos ángulos de lados perpendiculares y que sean suplementarios.

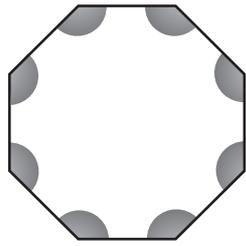


35. Dibuja un rectángulo y todos sus ángulos. ¿Cuánto suman entre todos ellos?



La diagonal divide al rectángulo en dos triángulos.
 Suma de ángulos $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$

36. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos de un octógono regular?



$$S = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S = (8 - 2) \cdot 180^\circ = 6 \cdot 180^\circ = 1\,080^\circ$$

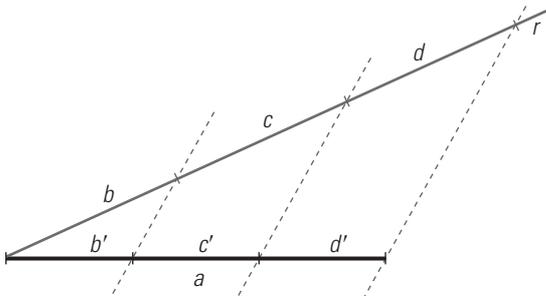
Cada uno de los ocho ángulos mide $1\,080^\circ : 8 = 135^\circ$

2. TEOREMA DE THALES

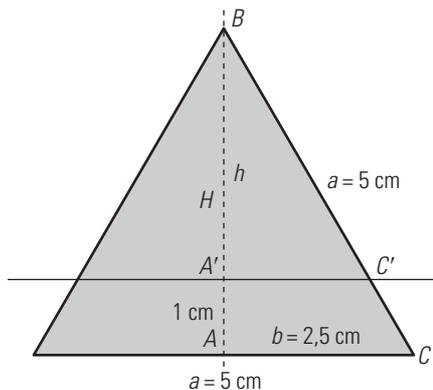
37. Calcula la altura de las torres de Hércules en Los Barrios (Cádiz), sabiendo que su sombra mide 42 m y que en ese mismo instante una persona de 1,74 m proyecta una sombra de 58 cm

$$\frac{0,58}{1,74} = \frac{42}{x} \Rightarrow x = \frac{1,74 \cdot 42}{0,58} = 126 \text{ m}$$

38. Dibuja en tu cuaderno un segmento de 5 cm y divídelo en 3 partes iguales.



39. En un triángulo equilátero de lado 5 cm, trazamos una recta paralela a la base y a 1 cm de la base. Halla la altura de ambos triángulos.



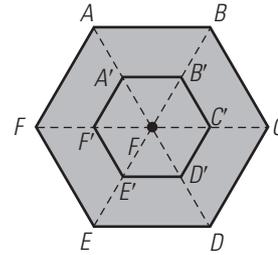
En el triángulo ABC podemos hallar el cateto H :

$$b^2 + H^2 = a^2 \Rightarrow 2,5^2 + H^2 = 5^2 \Rightarrow H^2 = 18,75$$

$$H = \sqrt{18,75} = 4,33 \text{ m}$$

$$h = H - 1 = 4,33 - 1 = 3,33 \text{ cm}$$

40. Dibuja en tu cuaderno un hexágono regular de 1,5 cm de lado. Dibuja otro semejante de razón de semejanza 0,5 y centro el centro del hexágono.

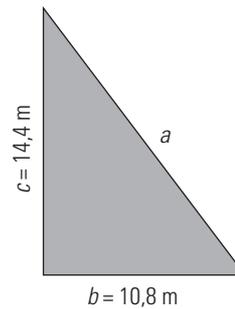


41. ¿Por qué los cuadrados son siempre semejantes?

Porque tienen sus lados y ángulos iguales; cada uno de los ángulos es recto y mide 90°

3. TEOREMA DE PITÁGORAS

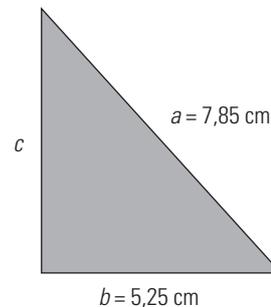
42. Halla la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que los catetos miden 10,8 m y 14,4 m



$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 10,8^2 + 14,4^2 = 324$$

$$a = \sqrt{324} = 18 \text{ cm}$$

43. En un triángulo rectángulo se conoce un cateto, que mide 5,25 cm, y la hipotenusa, que mide 7,85 cm. Halla cuánto mide el otro cateto.



$$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow 5,25^2 + c^2 = 7,85^2 \Rightarrow c^2 = 34,06$$

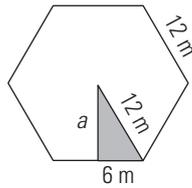
$$c = \sqrt{34,06} = 5,84 \text{ cm}$$

44. Halla todas las ternas pitagóricas en las que los tres números sean menores o iguales que 10

$$3, 4 \text{ y } 5 \Rightarrow 3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow 9 + 16 = 25$$

$$6, 8 \text{ y } 10 \Rightarrow 6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow 36 + 64 = 100$$

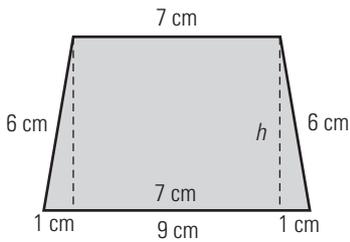
45. Halla la apotema de un hexágono regular en el que el lado mide 12 m



$$a^2 + 6^2 = 12^2 \Rightarrow a^2 + 36 = 144 \Rightarrow a^2 = 108$$

$$a = \sqrt{108} = 10,39 \text{ m}$$

46. Calcula la altura de un trapecio isósceles en el que las bases miden 9 cm, 7 cm, y los lados oblicuos, 6 cm

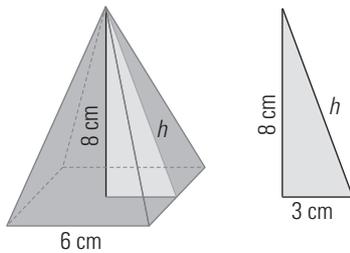


Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de la derecha:

$$h^2 + 1^2 = 6^2 \Rightarrow h^2 + 1 = 36 \Rightarrow h^2 = 35$$

$$h = \sqrt{35} = 5,92 \text{ m}$$

47. Halla la apotema de la siguiente pirámide cuadrangular:

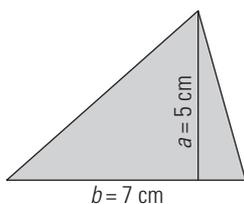


$$h^2 = 3^2 + 8^2 \Rightarrow h^2 = 9 + 64 = 73$$

$$h = \sqrt{73} = 8,54 \text{ cm}$$

4. ÁREA DE FIGURAS PLANAS

48. Calcula mentalmente el área de un triángulo cuya base mide 7 cm y cuya altura es de 5 cm



Área:

$$A = \frac{b \cdot a}{2}$$

$$A = \frac{7 \cdot 5}{2} = 17,5 \text{ cm}^2$$

49. Calcula mentalmente el área de un cuadrado cuyo lado mide 0,6 m

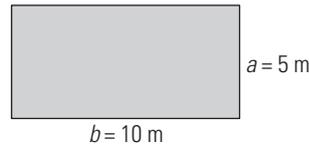


Área:

$$A = l^2$$

$$A = 0,6^2 = 0,36 \text{ m}^2$$

50. Calcula mentalmente el área de un rectángulo que mide la mitad de alto que de largo y cuya altura es de 5 m

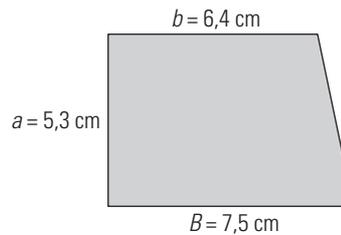


Área:

$$A = b \cdot a$$

$$A = 10 \cdot 5 = 50 \text{ m}^2$$

51. Calcula el área de un trapecio rectángulo cuyas bases miden 7,5 cm y 6,4 cm, y el lado perpendicular a las bases mide 5,3 cm

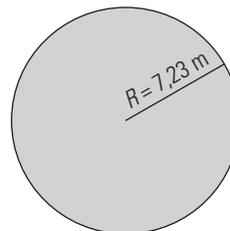


Área:

$$A = \frac{B+b}{2} \cdot a$$

$$A = \frac{7,5+6,4}{2} \cdot 5,3 = 36,84 \text{ cm}^2$$

52. Calcula el área de un círculo cuyo radio mide 7,23 m



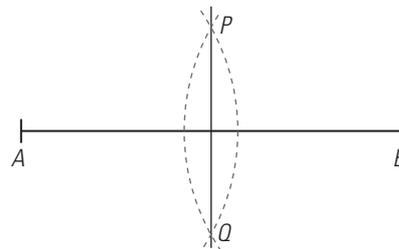
Área:

$$A = \pi R^2$$

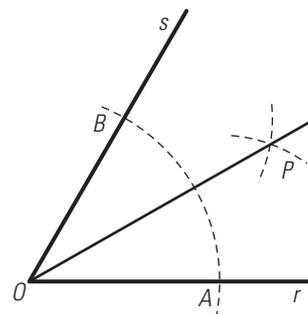
$$A = \pi \cdot 7,23^2 = 164,22 \text{ m}^2$$

PARA AMPLIAR

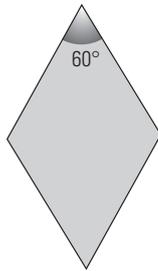
53. Dibuja un segmento de 5 cm y halla su mediatriz.



54. Dibuja un ángulo de 60° y halla su bisectriz.



55. ¿Cuánto miden cada uno de los otros tres ángulos de un rombo en el que uno de sus ángulos mide 60°?

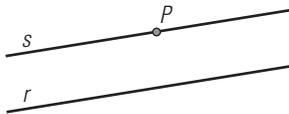


El ángulo opuesto mide lo mismo, 60°

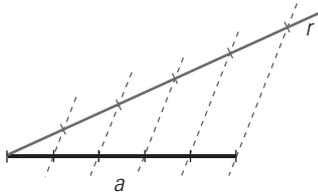
Los otros dos ángulos son suplementarios al de 60° y también son iguales.

Mide cada uno: $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

56. Dibuja una recta r y un punto P que no esté en dicha recta. Traza la recta paralela a r que pasa por el punto P



57. Dibuja en tu cuaderno un segmento de 3 cm y divídelo en 5 partes iguales.



58. Calcula la longitud de un aspa del molino, sabiendo que su sombra mide 5 m y que en ese mismo instante una persona de 1,80 m proyecta una sombra de 2,5 m

$$\frac{2,5}{1,80} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = \frac{1,80 \cdot 5}{2,5} = 3,60 \text{ m}$$

59. De los siguientes triángulos di cuál es acutángulo, rectángulo y obtusángulo:

a) $a = 6 \text{ m}$, $b = 8 \text{ m}$, $c = 10 \text{ m}$

b) $a = 2 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$, $c = 4 \text{ m}$

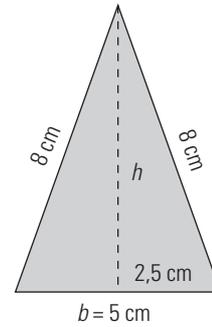
c) $a = 5 \text{ m}$, $b = 6 \text{ m}$, $c = 7 \text{ m}$

a) $6^2 + 8^2 = 36 + 68 = 100$, $10^2 = 100$, como son iguales es rectángulo.

b) $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$, $4^2 = 16$, como es mayor es obtusángulo.

c) $5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$, $7^2 = 49$, como es menor es acutángulo.

60. Calcula el área de un triángulo isósceles en el que los lados iguales miden 8 cm, y el desigual 5 cm

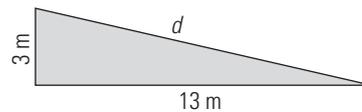


$$2,5^2 + h^2 = 8^2 \Rightarrow h^2 = 57,75$$

$$h = \sqrt{57,75} = 7,60 \text{ cm}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5,4 \cdot 7,6}{2} = 20,52 \text{ cm}^2$$

61. En la siguiente rampa, el lado horizontal mide 13 m, y la altura, 3 m. ¿Cuánto mide la rampa?

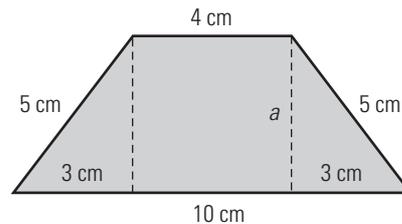


Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 13^2 + 3^2 \Rightarrow d^2 = 169 + 9 = 178$$

$$d = \sqrt{178} = 13,34 \text{ m}$$

62. Calcula el área de un trapecio isósceles en el que las bases miden 10 cm y 4 cm, y los otros dos lados tienen 5 cm cada uno.



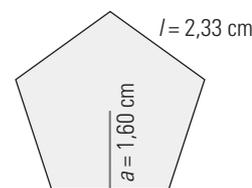
Hay que aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la altura:

$$a = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

$$A = \frac{B+b}{2} \cdot a$$

$$A = \frac{10+4}{2} \cdot 4 = 28 \text{ m}^2$$

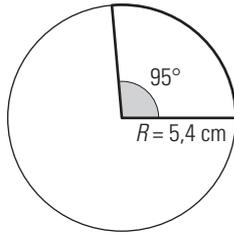
63. Calcula el área del siguiente pentágono:



$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

$$A = \frac{5 \cdot 2,33 \cdot 1,6}{2} = 9,32 \text{ cm}^2$$

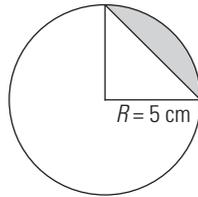
64. Calcula la longitud de un arco cuyo radio mide 5,4 cm y cuya amplitud es de 95°



$$L = \frac{2\pi R}{360} \cdot n^\circ$$

$$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot 5,4}{360^\circ} \cdot 95^\circ = 8,95 \text{ cm}$$

65. Calcula el área del segmento circular coloreado de azul en la siguiente figura:



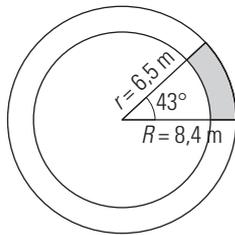
Área:

$$A_{\text{segmento}} = A_{\text{sector}} - A_{\text{triángulo}}$$

$$A_{\text{segmento}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ - \frac{b \cdot a}{2}$$

$$A = \frac{\pi \cdot 5^2}{360^\circ} \cdot 90^\circ - \frac{5 \cdot 5}{2} = 7,13 \text{ m}^2$$

66. Calcula el área de un trapecio circular de radios $R = 8,4 \text{ m}$ y $r = 6,5 \text{ m}$, y de amplitud, 43°



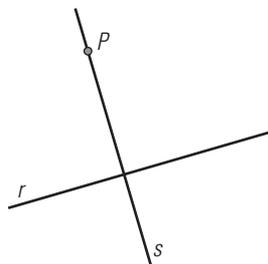
Área:

$$A = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{360^\circ} \cdot n^\circ$$

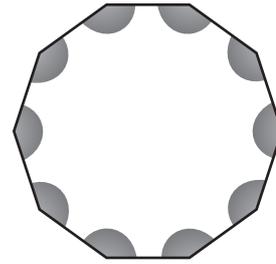
$$A = \frac{\pi(8,4^2 - 6,5^2)}{360^\circ} \cdot 43^\circ = 10,62 \text{ m}^2$$

PROBLEMAS

67. Dibuja una recta r y un punto P exterior a dicha recta. Traza la recta perpendicular a r que pasa por el punto P



68. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos de un decágono regular?



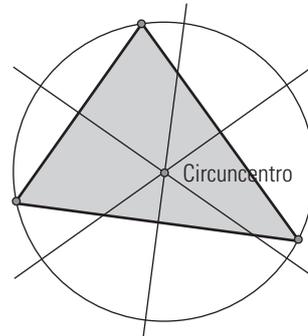
$$S = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

$$S = (10 - 2) \cdot 180^\circ = 8 \cdot 180^\circ = 1440^\circ$$

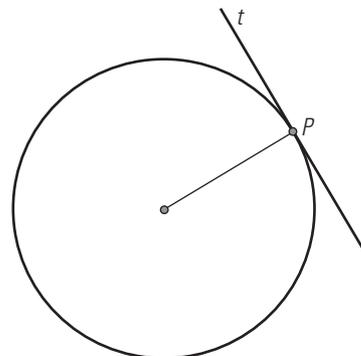
Cada uno de los 10 ángulos mide $1440^\circ : 10 = 144^\circ$

69. Dibuja tres puntos no alineados y, utilizando las propiedades de los lugares geométricos, traza la circunferencia que pasa por ellos.

El centro es un punto que equidista de los extremos y es el circuncentro del triángulo formado por los tres puntos.



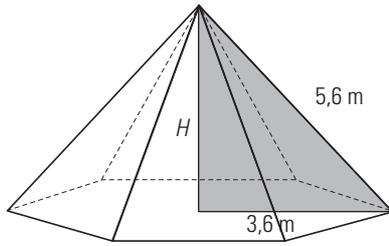
70. Dibuja una circunferencia y traza la recta tangente a dicha circunferencia por uno de sus puntos. Utiliza la propiedad de que la recta tangente es perpendicular al radio que une el punto con el centro.



71. Calcula la altura de la Giralda de Sevilla, sabiendo que su sombra mide 49,25 m y que en ese mismo instante un objeto de 4 m proyecta una sombra de 2 m

$$\frac{2}{4} = \frac{49,25}{x} \Rightarrow x = \frac{49,25 \cdot 4}{2} = 98,5 \text{ m}$$

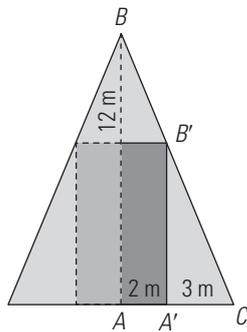
72. Halla la altura de una pirámide hexagonal en la que la arista de la base mide 3,6 m, y la arista lateral, 5,6 m



$$H^2 + 3,6^2 = 5,6^2 \Rightarrow H^2 + 12,96 = 31,36 \Rightarrow H^2 = 18,4$$

$$H = \sqrt{18,4} = 4,29 \text{ m}$$

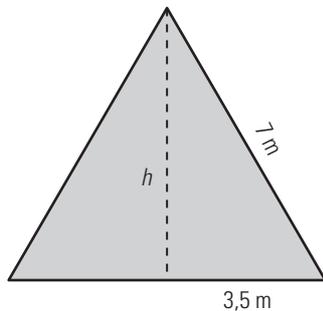
73. Se tiene un rectángulo inscrito en un triángulo isósceles en el que un lado del rectángulo está en el lado desigual del triángulo. El lado desigual del triángulo mide 10 m, y la altura correspondiente, 12 m. Si la base del rectángulo mide 2 m, ¿cuánto mide de altura?



Los triángulos ABC y $A'B'C$ están en posición de Tales, por tanto son semejantes.

$$\frac{5}{3} = \frac{12}{h} \Rightarrow h = \frac{12 \cdot 3}{5} = 7,2 \text{ cm}$$

74. Calcula el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide 7 m



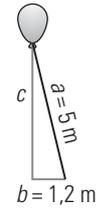
$$h^2 + 3,5^2 = 7^2 \Rightarrow h^2 + 12,25 = 49 \Rightarrow h^2 = 36,75$$

$$h = \sqrt{36,75} = 6,06 \text{ m}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{7 \cdot 6,06}{2} = 21,21 \text{ m}^2$$

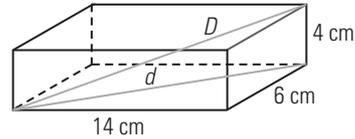
75. Un globo está sujeto a una cuerda de 5 m y observamos que se ha desplazado 1,2 m por el viento. ¿A qué altura está el globo?



$$c^2 + 1,2^2 = 5^2 \Rightarrow c^2 + 1,44 = 25 \Rightarrow c^2 = 23,56$$

$$c = \sqrt{23,56} = 4,85 \text{ m}$$

76. Calcula la diagonal del ortoedro de la figura:

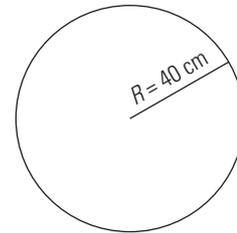


Se aplica el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$D^2 = 14^2 + 6^2 + 4^2 = 196 + 36 + 16 = 248$$

$$D = \sqrt{248} = 15,75 \text{ m}$$

77. Calcula el número de vueltas que da una rueda de bicicleta para recorrer 1 km si el radio de la bicicleta mide 40 cm



Longitud de la rueda:

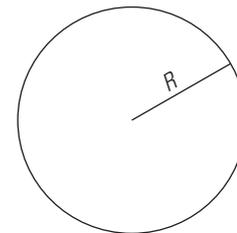
$$L = 2\pi R$$

$$L = 2 \cdot \pi \cdot 0,4 = 2,51 \text{ m}$$

N.º de vueltas:

$$1000 : 2,51 = 398,4 \text{ vueltas.}$$

78. Calcula el radio de una circunferencia que mide 37,5 m de longitud.



$$L = 2\pi R$$

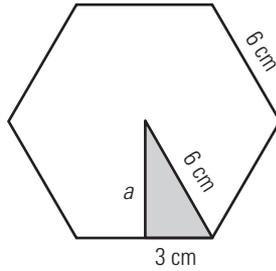
$$2\pi R = 37,5$$

$$R = \frac{37,5}{2\pi} = 5,97 \text{ m}$$

79. Calcula el radio de la Tierra sabiendo que un cuadrante mide 10 000 km

$$2\pi R = 4 \cdot 10\,000 \Rightarrow R = \frac{40\,000}{2\pi} = 6\,366,19 \text{ km}$$

80. Calcula el área de un hexágono regular de lado 6 cm



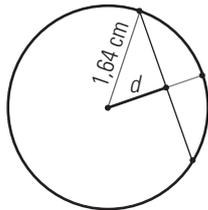
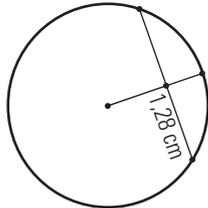
$$a^2 + 3^2 = 6^2 \Rightarrow a^2 + 9 = 36 \Rightarrow a^2 = 27$$

$$a = \sqrt{27} = 5,20 \text{ cm}$$

$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

$$A = \frac{6 \cdot 6 \cdot 5,20}{2} = 93,6 \text{ cm}^2$$

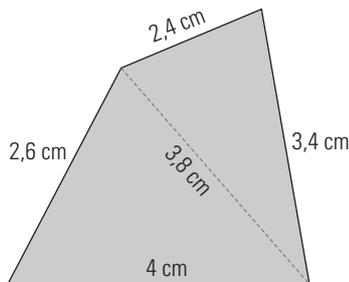
81. En la siguiente circunferencia el radio mide 1,64 cm, y la cuerda, 2,55 cm. Halla la distancia del centro de la circunferencia a la cuerda.



$$d^2 + 1,28^2 = 1,64^2 \Rightarrow d^2 = 1,0512$$

$$d = \sqrt{1,0512} = 1,03 \text{ cm}$$

82. Calcula el área del siguiente trapezoide:



Tenemos que descomponerlo en dos triángulos y aplicar en cada uno de ellos la fórmula de Herón:

- Triángulo de lados: 4 cm, 2,6 cm y 3,8 cm

Perímetro: 10,4 \Rightarrow Semiperímetro: 5,2

Área: $\sqrt{5,2 \cdot 1,2 \cdot 2,6 \cdot 1,4} = 4,77 \text{ cm}^2$

- Triángulo de lados: 3,8 cm, 2,4 cm y 3,4 cm

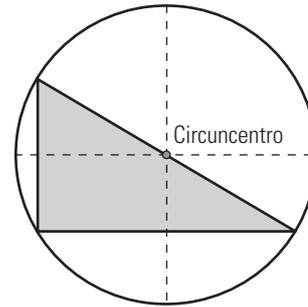
Perímetro: 9,6 \Rightarrow Semiperímetro: 4,8

Área: $\sqrt{4,8 \cdot 1 \cdot 2,4 \cdot 1,4} = 4,02 \text{ cm}^2$

Área total: 4,77 + 4,02 = 8,79 cm²

PARA PROFUNDIZAR

83. Dibuja un triángulo rectángulo y la circunferencia que pasa por los tres vértices. ¿Dónde está el circuncentro del triángulo?



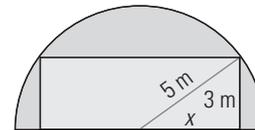
El circuncentro está en el centro de la hipotenusa.

84. La sombra de una torre de alta tensión mide 15 m. En ese mismo momento la sombra de un objeto de 1,5 m mide 2 m. Calcula la altura de la torre de alta tensión.

Se aplica el teorema de Tales.

$$\frac{2}{1,5} = \frac{15}{x} \Rightarrow x = \frac{15 \cdot 1,5}{2} = 11,25 \text{ m}$$

85. Calcula el área del siguiente rectángulo inscrito en una semicircunferencia.



Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar x:

$$x^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 = 16$$

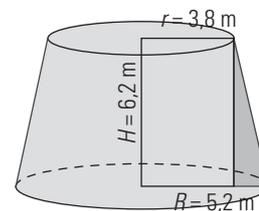
$$x = \sqrt{16} = 4 \text{ m}$$

La base mide 2 · 4 = 8 m

Área = b · a

Área = 8 · 3 = 24 m²

86. Halla la generatriz de un tronco de cono en el que los radios de las bases miden 5,2 m y 3,8 m, y la altura, 6,2 m

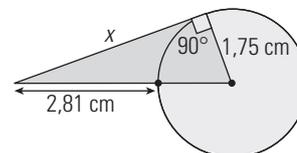


$$G^2 = (R - r)^2 + H^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G^2 = (5,2 - 3,8)^2 + 6,2^2 = 1,4^2 + 6,2^2 = 40,4$$

$$G = \sqrt{40,4} = 6,36 \text{ m}$$

87. Calcula el valor de x en el siguiente dibujo

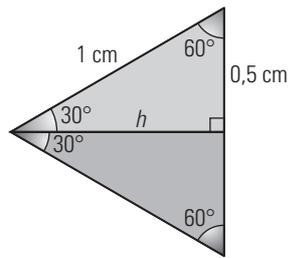


Se aplica el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + 1,75^2 = (2,81 + 1,75)^2 \Rightarrow x^2 = 17,73$$

$$x = \sqrt{17,73} = 4,21 \text{ cm}$$

88. Calcula el valor de la altura h del siguiente triángulo equilátero:

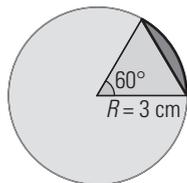


Se aplica el teorema de Pitágoras.

$$h^2 + 0,5^2 = 1^2 \Rightarrow h^2 + 0,25 = 1 \Rightarrow h^2 = 0,75$$

$$h = \sqrt{0,75} = 0,87 \text{ m}$$

89. Calcula el área del segmento circular coloreado de amarillo en la siguiente figura:



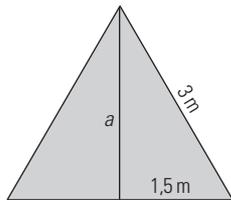
$$A_{\text{segmento}} = A_{\text{sector}} - A_{\text{triángulo}}$$

Área del sector:

$$A = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ$$

$$A = \frac{\pi \cdot 3^2}{360^\circ} \cdot 60^\circ = 4,71 \text{ m}^2$$

Hay que aplicar el teorema de Pitágoras para hallar la altura.



$$a = \sqrt{3^2 - 1,5^2} = \sqrt{6,75} = 2,60$$

$$\text{Área del triángulo: } 3 \cdot 2,6 : 2 = 3,9 \text{ m}^2$$

$$\text{Área del segmento: } 4,71 - 3,9 = 0,81 \text{ m}^2$$

APLICA TUS COMPETENCIAS

90. Se dibuja un terreno de forma que 300 m en la realidad son 2 cm en el croquis. Halla la escala y averigua si es un plano o un mapa.

$$2 \text{ cm} : 300 \text{ m} = 2 \text{ cm} : 30\,000 \text{ cm} = 2 : 30\,000 = 1 : 15\,000$$

Es un mapa.

91. Se dibuja un terreno de forma que 100 m en la realidad son 2 cm en el croquis. Halla la escala y averigua si es un plano o un mapa.

$$2 \text{ cm} : 100 \text{ m} = 2 \text{ cm} : 10\,000 \text{ cm} = 2 : 10\,000 = 1 : 5\,000$$

Es un plano.

92. Una fotocopia está reducida al 25%. Si el original era un papel DIN A4 cuyo tamaño es 21 cm x 29,7 cm. Halla el área del original y de la fotocopia.

$$\text{Área del original} = 21 \cdot 29,7 = 623,7 \text{ cm}^2$$

Medidas de la fotocopia:

$$21 \cdot 0,25 = 5,25 \text{ cm}$$

$$29,7 \cdot 0,25 = 7,425 \text{ cm}$$

$$\text{Área de la fotocopia} = 5,25 \cdot 7,425 = 38,98125 \text{ cm}^2$$

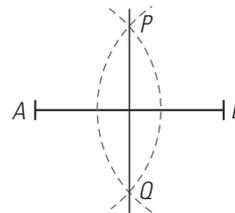
COMPRUEBA LO QUE SABES

1. ¿Qué es una terna pitagórica? Pon un ejemplo.

Una **terna pitagórica** son tres números enteros que verifican el teorema de Pitágoras.

Ejemplo: 3, 4 y 5

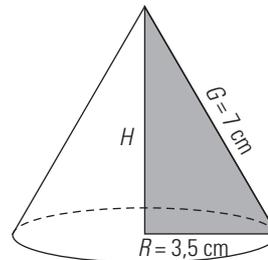
2. Dibuja un segmento de 2,5 cm y halla su mediatriz.



3. Dos triángulos están en posición de Thales y sabemos que $AB = 5 \text{ cm}$, $AC = 3 \text{ cm}$ y $AB' = 4 \text{ cm}$. Calcula cuánto mide AC'

$$x = \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{AC'}{3} \Rightarrow AC' = \frac{4 \cdot 3}{5} = 2,4 \text{ cm}$$

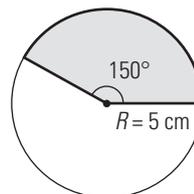
4. Calcula la altura de un cono en el que el radio de la base mide 3,5 cm, y la generatriz, 7 cm



$$R^2 + H^2 = G^2 \Rightarrow 3,5^2 + H^2 = 7^2 \Rightarrow H^2 = 36,75$$

$$H = \sqrt{36,75} = 6,06 \text{ m}$$

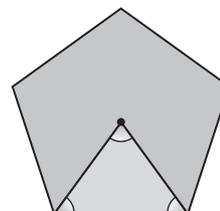
5. Calcula el área de un sector circular de radio 5 cm, y amplitud, 150°



$$A = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ$$

$$A = \frac{\pi \cdot 5^2}{360^\circ} \cdot 150^\circ = 32,72 \text{ m}^2$$

6. Calcula los tres ángulos del siguiente triángulo que tiene un vértice en el centro del pentágono regular y los otros dos en dos vértices consecutivos.



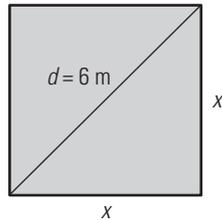
Ángulo central $360^\circ : 5 = 72^\circ$

Cada uno de los otros ángulos $(180^\circ - 72^\circ) : 2 = 54^\circ$

- 7. Calcula la altura de la torre Eiffel de París sabiendo que cuando su sombra es de 233,58 m, la sombra de una persona de 1,75 m es 1,25 m. Redondea el resultado a metros.**

$$\frac{1,25}{1,75} = \frac{232}{x} \Rightarrow x = \frac{232 \cdot 1,75}{1,25} = 325 \text{ m}$$

- 8. Calcula el área de un cuadrado en el que la diagonal mide 6 m**



$$x^2 + x^2 = 6^2 \Rightarrow 2x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 18$$

$$\text{Área} = x^2 = 18 \text{ m}^2$$

WINDOWS/LINUX **GEOGEBRA**



PASO A PASO

- 93. Dibuja un segmento y su mediatriz.**

Resuelto en el libro del alumnado.

- 94. Dibuja un ángulo y traza su bisectriz.**

Resuelto en el libro del alumnado.

- 95. Comprueba el teorema de Tales.**

Resuelto en el libro del alumnado.

- 96. Comprueba el teorema de Pitágoras.**

Resuelto en el libro del alumnado.

PRACTICA

- 97. Dibuja un pentágono regular y sus ángulos.**

Resuelto en el libro del alumnado.

- 98. Dibuja un triángulo, halla su circuncentro y dibuja la circunferencia circunscrita.**

Resuelto en el libro del alumnado.

- 99. Calcula el valor de π**

Resuelto en el libro del alumnado.

- 100. Dibuja un rectángulo de base 7 cm, y altura, 3,5 cm. Calcula su perímetro y su área.**

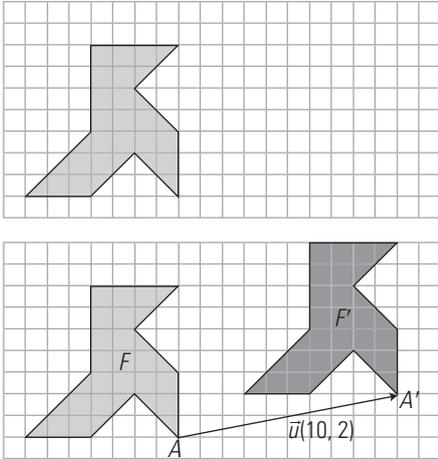
Resuelto en el libro del alumnado.

11. Movimientos

1. VECTORES Y TRASLACIONES

PIENSA Y CALCULA

Copia en tu cuaderno y dibuja la pajarita 10 unidades a la derecha y 2 hacia arriba.



CARNÉ CALCULISTA

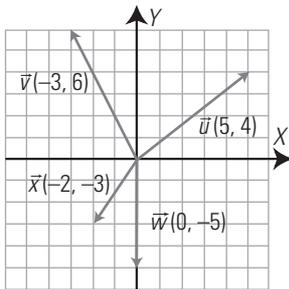
Desarrolla: $(3x^2 - 5)^2 = 9x^4 - 30x^2 + 25$

Factoriza: $x^3 + 12x^2 + 36x = x(x + 6)^2$

APLICA LA TEORÍA

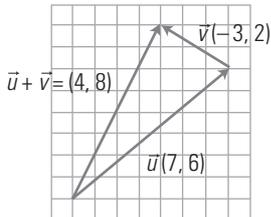
1. Dibuja unos ejes coordenados y representa en ellos los siguientes vectores de forma que el origen de cada vector sea el origen de coordenadas:

- a) $\vec{u}(5, 4)$ b) $\vec{v}(-3, 6)$ c) $\vec{w}(0, -5)$ d) $\vec{x}(-2, -3)$



2. Suma de forma analítica y geométrica los vectores $\vec{u}(7, 6)$ y $\vec{v}(-3, 2)$

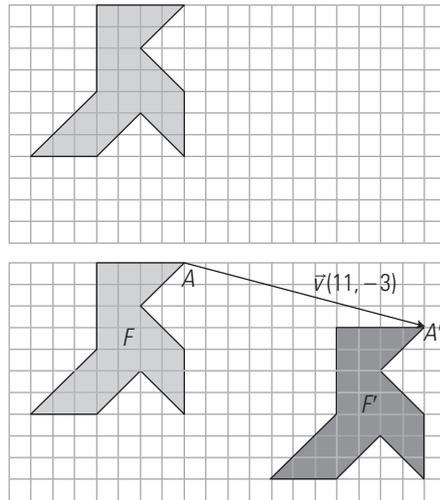
$\vec{u} + \vec{v} = (4, 8)$



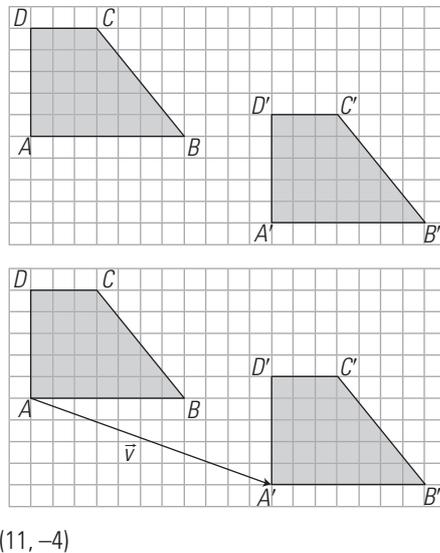
3. Pon tres ejemplos de la vida real en los que se utilice una traslación.

- a) Una ventanilla de un coche cuando se sube y se baja.
- b) Una puerta corredera cuando se abre y se cierra.
- c) Un ascensor cuando sube y baja.

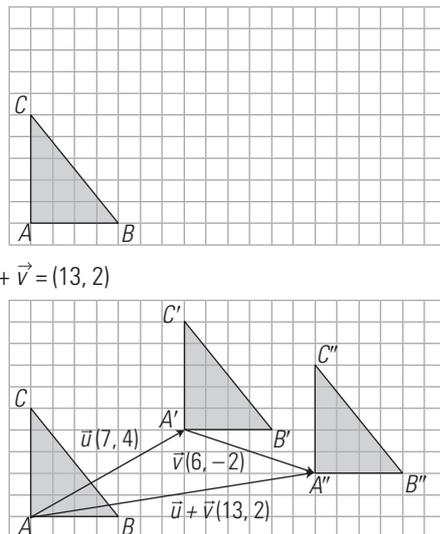
4. Dada la pajarita del dibujo, cópiala en tu cuaderno y trasládala según el vector $\vec{v}(11, -3)$



5. Calcula el vector que transforma el trapecio ABCD en el trapecio A'B'C'D'



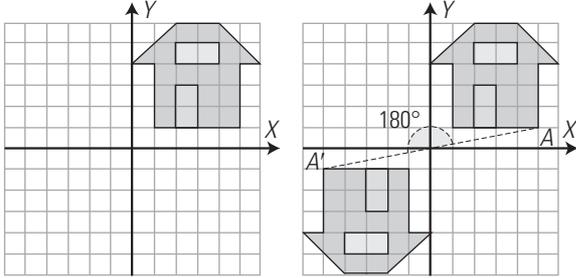
6. Halla la composición de las traslaciones de vectores $\vec{u}(7, 4)$ y $\vec{v}(6, -2)$ y escribe el vector correspondiente. Después aplica la traslación resultante al triángulo del dibujo.



2. GIROS Y SIMETRÍA CENTRAL

PIENSA Y CALCULA

Dibuja en tu cuaderno la casa simétrica del dibujo respecto del origen de coordenadas. Marca el homólogo de un punto cualquiera y halla el ángulo que ha girado respecto del origen de coordenadas.



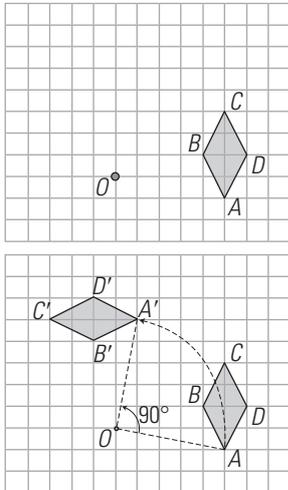
CARNÉ CALCULISTA

Resuelve la ecuación:

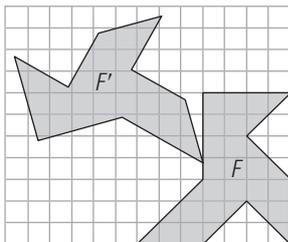
$$\frac{x}{3} - 5 + \frac{x-1}{4} = x - \frac{3x+1}{6} \Rightarrow x = 61$$

APLICA LA TEORÍA

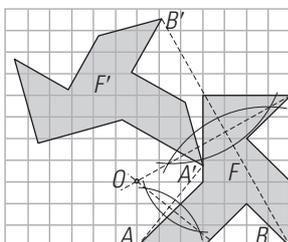
7. Aplica al rombo de la figura un giro de 90° respecto del centro *O*



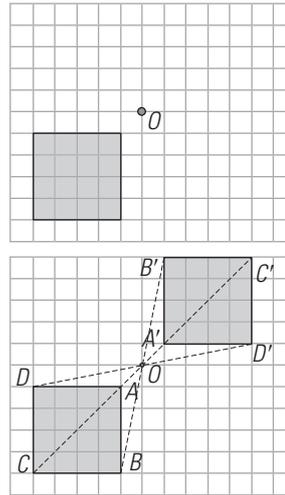
8. Calcula el centro de giro que transforma la pajarita *F* en la pajarita *F'*



El centro de giro es el punto de corte de las mediatrices de los segmentos *AA'* y *BB'*

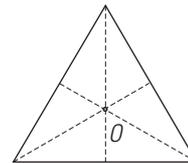


9. Aplica al cuadrado de la figura una simetría central de centro el punto *O*

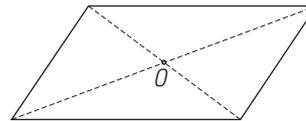


10. Dibuja un triángulo equilátero y halla su centro de giro. ¿Cuánto tiene que girar para que coincida consigo mismo?

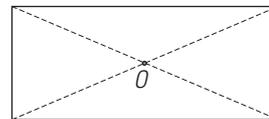
120°, o bien 240°



11. Dibuja un romboide y su centro de simetría.



12. Dibuja un rectángulo. Halla un centro y un argumento de giro para que sea doble o invariante.



El argumento deber ser 180°

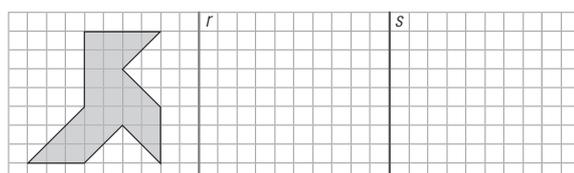
13. Pon tres ejemplos de la vida real en los que se utilice un giro.

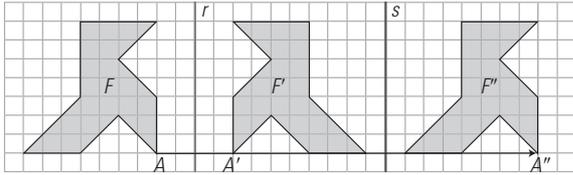
- a) Al abrir una puerta de bisagras.
- b) Al pasar las hojas de un libro.
- c) Las aspas de un molino de energía eólica.

3. SIMETRÍA AXIAL. FRISOS Y MOSAICOS

PIENSA Y CALCULA

Dibuja la simétrica de la pajarita respecto de la recta *r*, y luego de la obtenida respecto de la recta *s*. Define el movimiento que transforma la pajarita de la izquierda en la de la derecha.





La composición corresponde a una traslación cuyo vector tiene por módulo el doble de la distancia que hay entre los dos ejes, la dirección es perpendicular a los ejes y el sentido va desde el primer eje al segundo.

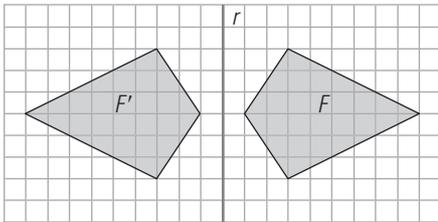
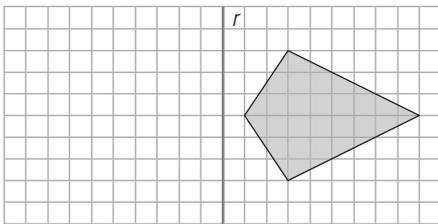
CARNÉ CALCULISTA

Resuelve el sistema:

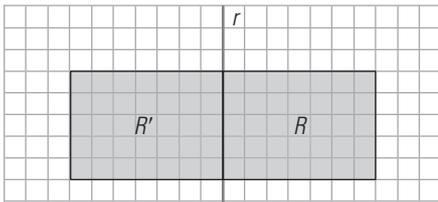
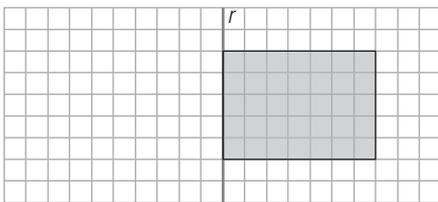
$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{y}{4} &= 1 \\ 2x - 3y &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 2; y = 0$$

APLICA LA TEORÍA

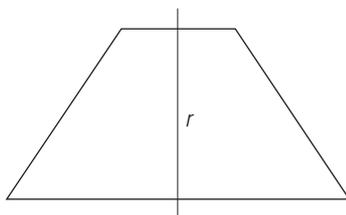
14. Dibuja en tu cuaderno la cometa simétrica de la del dibujo respecto del eje *r*



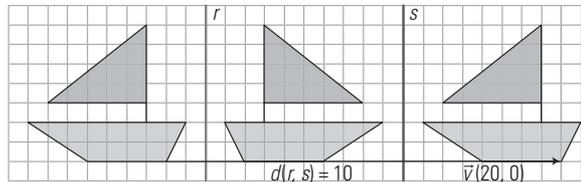
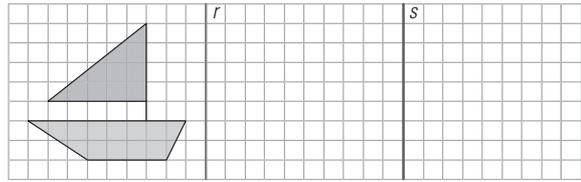
15. Dibuja en tu cuaderno el simétrico del rectángulo siguiente respecto del eje *r*



16. Dibuja un trapecio isósceles y su eje de simetría.



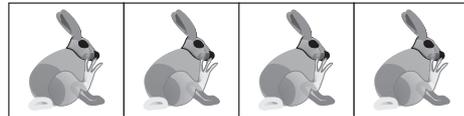
17. Dibuja en tu cuaderno el simétrico del barco respecto de la recta *r*, y después el simétrico del obtenido respecto de la recta *s*. ¿A qué movimiento corresponde la composición de las dos simetrías?



La composición corresponde a una traslación cuyo vector tiene por módulo el doble de la distancia que hay entre los dos ejes, la dirección es perpendicular a los ejes y el sentido va desde el primer eje al segundo.

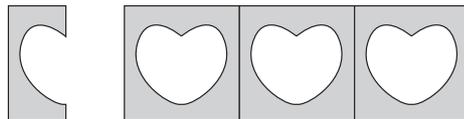
18. Dibuja un friso.

Solución abierta, por ejemplo:



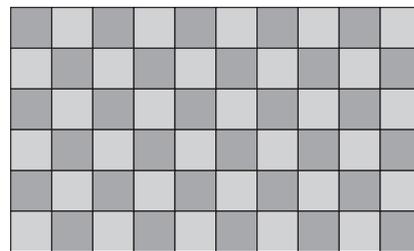
19. Haz un friso recortando una tira de papel doblada varias veces.

Solución abierta, por ejemplo:



20. Dibuja un mosaico regular.

Solución abierta, por ejemplo:



4. PLANOS Y EJES DE SIMETRÍA

PIENSA Y CALCULA

Observa la flor de la fotografía y dibuja en tu cuaderno un plano que divida a la flor en dos partes iguales o simétricas.



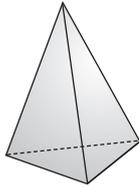
CARNÉ CALCULISTA

Calcula el lado de un rombo cuyas diagonales miden 24 m y 10 m

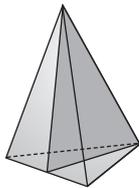
$$x = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

APLICA LA TEORÍA

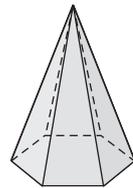
21. Dibuja en tu cuaderno el siguiente tetraedro. ¿Cuántos planos de simetría tiene?



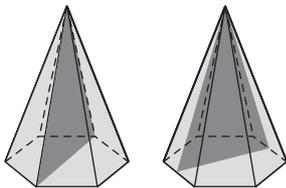
Tiene seis planos de simetría que pasan por una arista y el punto medio de otra arista, como el dibujo siguiente:



22. Dibuja en tu cuaderno una pirámide hexagonal regular. ¿Cuántos planos de simetría tiene?



Tiene tantos planos como ejes de simetría tiene la base. Como la base tiene 6 ejes de simetría, la pirámide tiene 6 planos que contiene a un eje de simetría que va de la base al vértice de la pirámide.

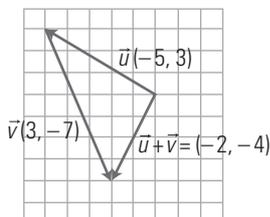


EJERCICIOS Y PROBLEMAS

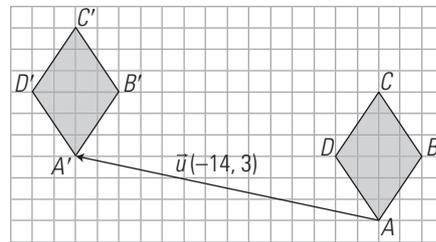
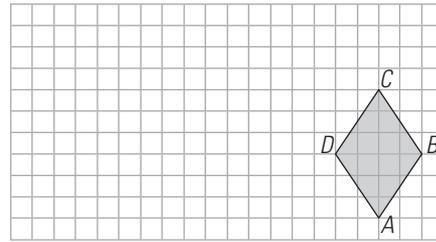
1. VECTORES Y TRASLACIONES

23. Suma de forma analítica y geométrica los vectores $\vec{u}(-5, 3)$ y $\vec{v}(3, -7)$

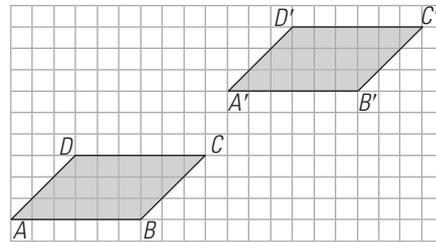
$$\vec{u} + \vec{v} = (-2, -4)$$



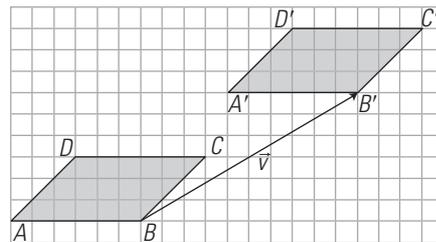
24. Dado el rombo de la figura, trasládalo según el vector $\vec{v}(-14, 3)$



25. Calcula el vector que transforma el romboide ABCD en el romboide A'B'C'D'

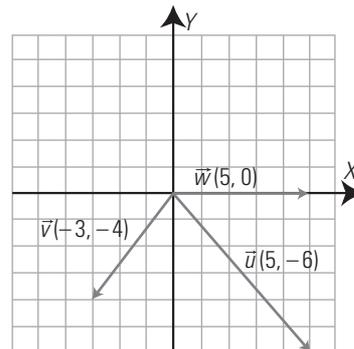


$$\vec{v}(10, 6)$$

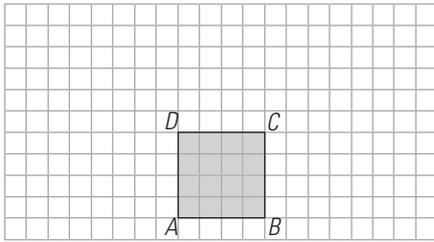


26. Dibuja unos ejes coordenados y representa en ellos los siguientes vectores de forma que su origen sea el origen de coordenadas:

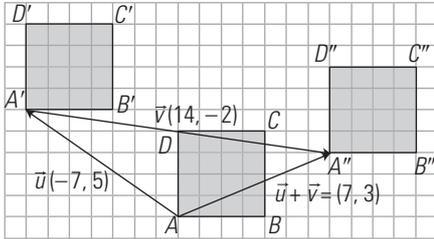
- a) $\vec{u}(5, -6)$ b) $\vec{v}(-3, -4)$ c) $\vec{w}(5, 0)$



27. Halla la composición de las traslaciones de vectores $\vec{u}(-7, 5)$ y $\vec{v}(14, -2)$ y escribe el vector correspondiente. Aplica la traslación resultante al cuadrado del dibujo.

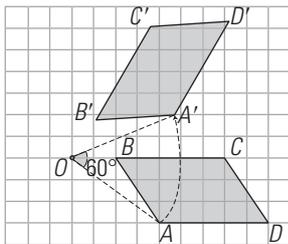
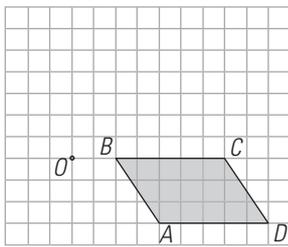


$\vec{u} + \vec{v} = (7, 3)$

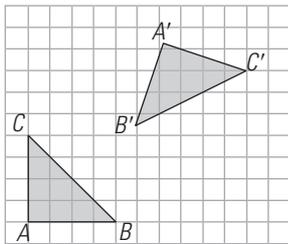


2. GIROS Y SIMETRÍA CENTRAL

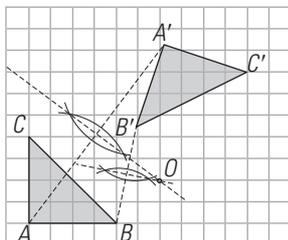
28. Aplica un giro de 60° al romboide de la figura respecto del centro O



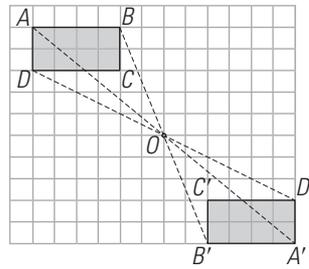
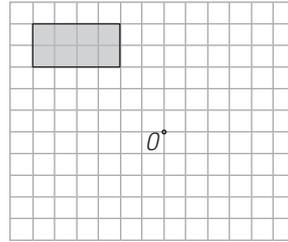
29. Calcula el centro de giro que transforma el triángulo rectángulo ABC en el A'B'C'



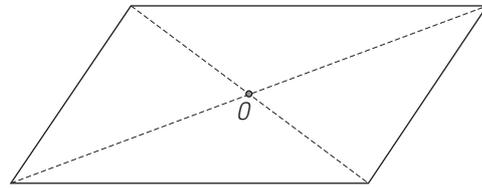
El centro de giro es el punto de corte de las mediatrices AA' y BB'



30. Aplica al rectángulo de la figura siguiente una simetría central de centro el punto O:

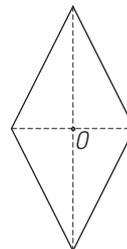


31. Dibuja un romboide y halla su centro de giro. ¿Cuánto tiene que girar para que coincida consigo mismo?

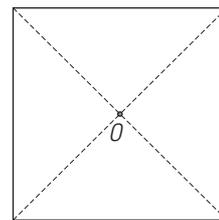


180°

32. Dibuja un rombo y su centro de simetría.



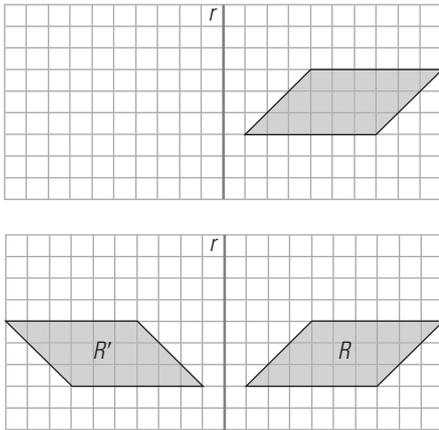
33. Dibuja un cuadrado. Halla un centro y un argumento de giro para que sea doble o invariante.



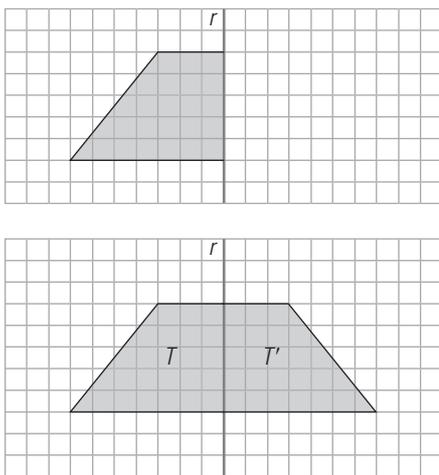
Los argumentos pueden ser: 90°, 180° y 270°

3. SIMETRÍA AXIAL. FRISOS Y MOSAICOS

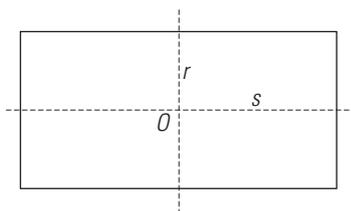
34. Copia en tu cuaderno y dibuja el simétrico del romboide del dibujo siguiente respecto del eje r



35. Copia en tu cuaderno y dibuja el simétrico del trapecio rectángulo del dibujo respecto del eje r

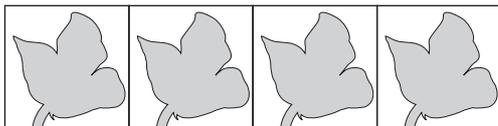


36. Dibuja un rectángulo y sus ejes de simetría.



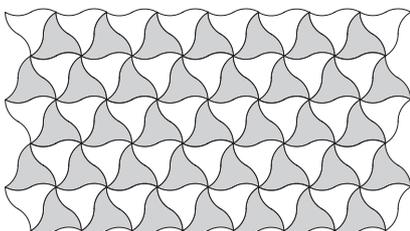
37. Dibuja un friso.

Solución abierta, por ejemplo:

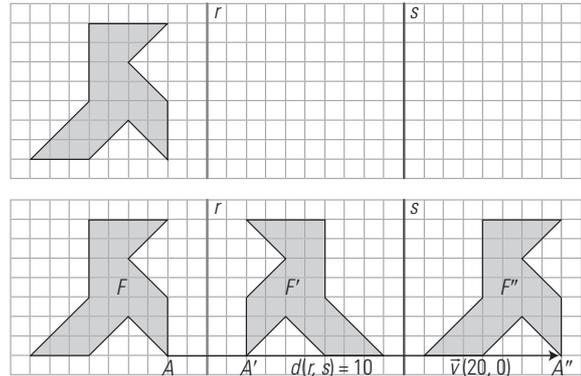


38. Dibuja un mosaico que no sea regular ni semirregular.

Solución abierta, por ejemplo:

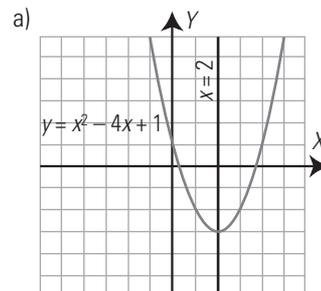
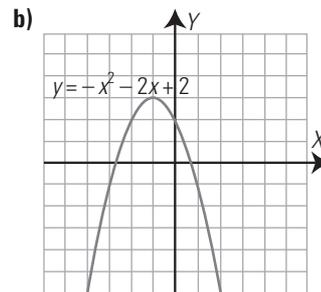
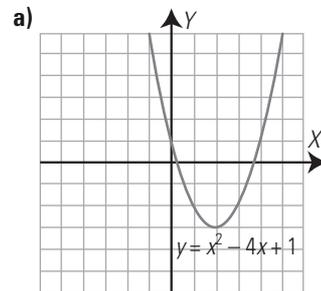


39. Dibuja la pajarita simétrica del dibujo respecto de la recta r y después la simétrica de la obtenida respecto de la recta s . ¿A qué movimiento corresponde la composición de ambas simetrías?

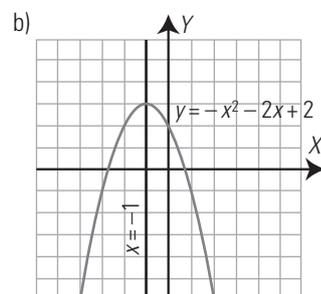


La composición corresponde a una traslación cuyo vector tiene por módulo el doble de la distancia que hay entre los dos ejes, la dirección es perpendicular a los ejes y el sentido va desde el primer eje al segundo.

40. Dibuja el eje de simetría de las siguientes parábolas y halla su fórmula o ecuación.



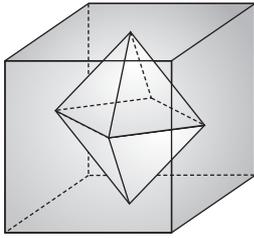
El eje de simetría es $x = 2$



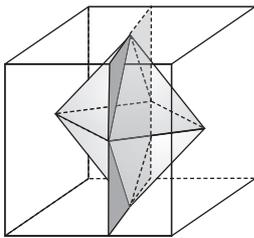
El eje de simetría es $x = -1$

4. PLANOS Y EJES DE SIMETRÍA

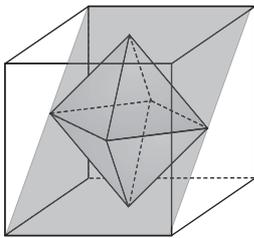
41. El cubo y el octaedro son dos poliedros duales. Teniendo esto en cuenta, ¿cuántos planos de simetría tiene el octaedro?



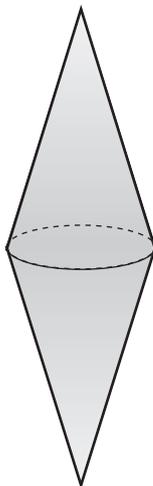
Como el octaedro y cubo son duales, ambos tienen el mismo número de planos. Hay tres planos que son paralelos a dos caras opuestas del cubo y que pasan por las aristas del octaedro.



Hay seis planos que pasan por las diagonales de dos caras opuestas del cubo y por el punto medio de una arista del octaedro y contiene a otra.



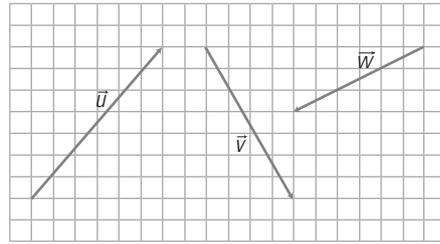
42. Copia la siguiente figura y encuentra los planos y los ejes de simetría.



La figura está compuesta por dos conos unidos por su base. Los planos de simetría serán todos los que pasan por un eje de simetría de la circunferencia y por los vértices de los conos. El eje de simetría es la recta que pasa por los vértices.

PARA AMPLIAR

43. Escribe las coordenadas de los vectores del siguiente dibujo y calcula sus módulos:

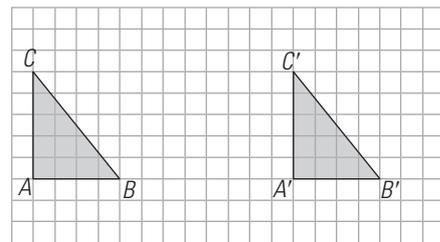
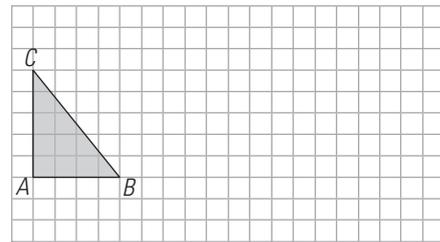


$$\vec{u}(6, 7) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{85} = 9,22$$

$$\vec{v}(4, -7) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-7)^2} = \sqrt{65} = 8,06$$

$$\vec{w}(-6, -3) \Rightarrow |\vec{w}| = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{45} = 6,71$$

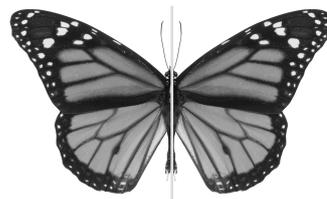
44. Dado el triángulo rectángulo de la figura, trasládalo según el vector $\vec{v}(12, 0)$



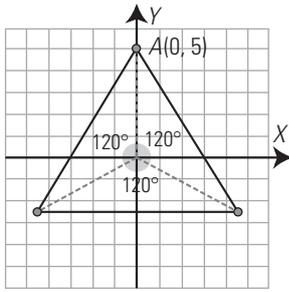
45. Dibuja en tu cuaderno el contorno de una mariposa y explica si posee simetría especular.



La mariposa tiene simetría especular con respecto a un plano que pase por el centro del cuerpo.

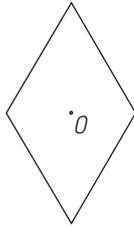


46. Dibuja unos ejes coordenados y aplica reiteradamente al punto $A(0, 5)$ un giro de centro el origen de coordenadas $O(0, 0)$ y argumento 120° . Une mediante segmentos los puntos que vas obteniendo. ¿Qué figura has generado?



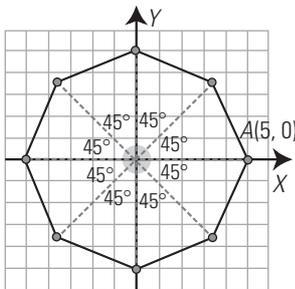
Se ha generado un triángulo equilátero.

47. Dibuja un rombo. Halla un centro y un argumento de giro para que sea doble o invariante.



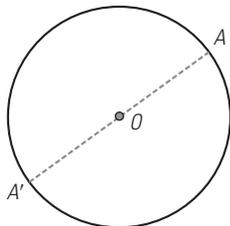
El argumento es 180°

48. Dibuja unos ejes coordenados y aplica reiteradamente al punto $A(5, 0)$ un giro de centro el origen de coordenadas $O(0, 0)$ y argumento 45° . Una mediante segmentos los puntos que vas obteniendo. ¿Qué figura has generado?



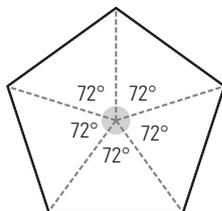
Se ha generado un octógono regular.

49. Dibuja una circunferencia y su centro de simetría.



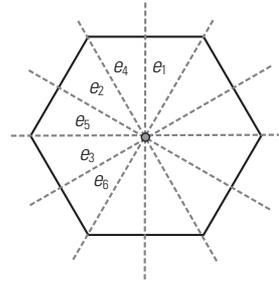
El centro de simetría es el centro de la circunferencia.

50. Dibuja un pentágono regular y halla su centro de giro. ¿Cuánto tiene que girar para que coincida consigo mismo?



Uno de los siguientes argumentos: 72° , 144° , 216° y 288°

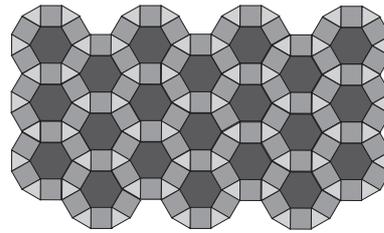
51. Dibuja un hexágono regular y sus ejes de simetría.



Tiene 6 ejes de simetría.

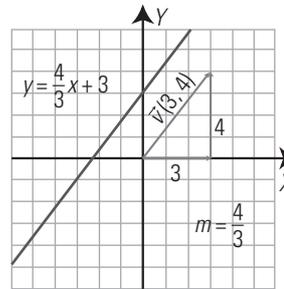
52. Dibuja un mosaico semirregular.

Solución abierta, por ejemplo:



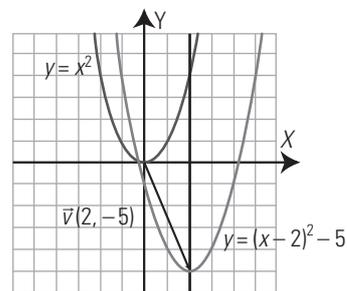
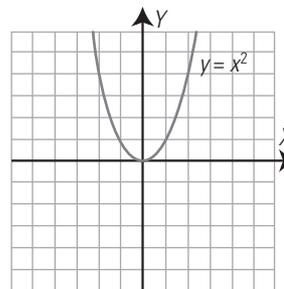
PROBLEMAS

53. Dibuja en unos ejes coordenados una recta que sea doble o invariante por la traslación del vector $\vec{v}(3, 4)$. ¿Qué pendiente tiene?



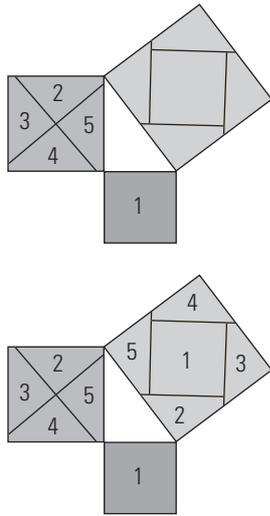
La pendiente es $m = \frac{4}{3}$

54. Traslada la parábola del dibujo según el vector $\vec{v}(2, -5)$ y halla la ecuación de la nueva parábola.

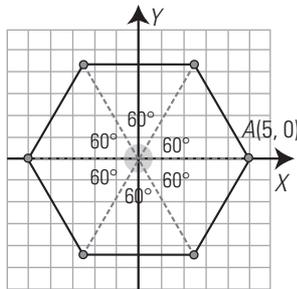


La nueva ecuación es: $y = x^2 - 4x - 1$

55. Demuestra el teorema de Pitágoras aplicando traslaciones a las superficies numeradas como 1, 2, 3, 4 y 5

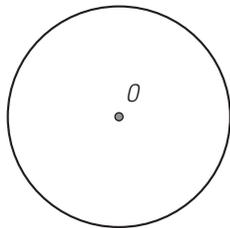


56. Dibuja unos ejes coordenados y aplica reiteradamente al punto $A(5, 0)$ un giro de centro el origen de coordenadas $O(0, 0)$ y argumento 60° . Une mediante segmentos los puntos que vas obteniendo. ¿Qué figura has generado?



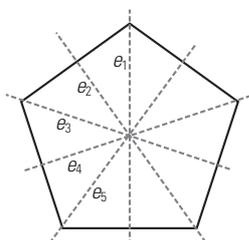
Un hexágono regular.

57. Dibuja una circunferencia. Halla un centro y un argumento de giro para que sea doble o invariante.



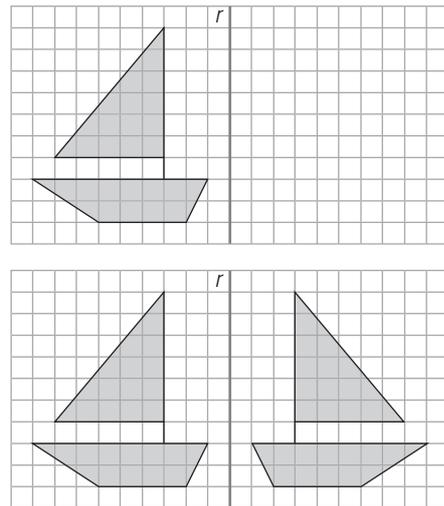
El centro de giro es el centro de la circunferencia y como argumento sirve cualquiera.

58. Dibuja un pentágono regular y sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene?



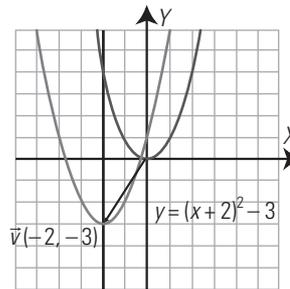
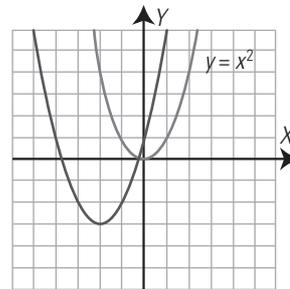
Tiene cinco ejes de simetría.

59. Halla el simétrico del barco respecto del eje r



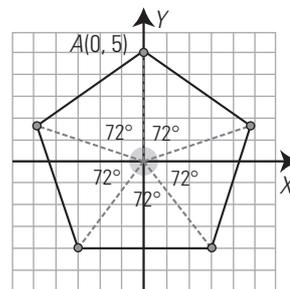
PARA PROFUNDIZAR

60. Calcula el vector que transforma la parábola roja en la parábola azul del siguiente dibujo y halla la ecuación de la nueva parábola.



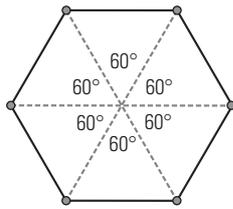
$\vec{v}(-2, -3)$
 $y = x^2 + 4x + 1$

61. Dibuja unos ejes coordenados y aplica reiteradamente al punto $A(0, 5)$ un giro de centro el origen de coordenadas $O(0, 0)$ y argumento 72° . Une mediante segmentos los puntos que vas obteniendo. ¿Qué figura has generado?



Un pentágono regular.

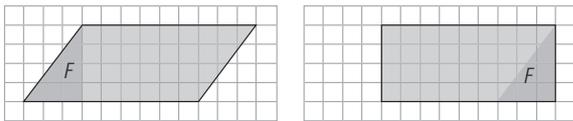
62. Dibuja un hexágono. Halla un centro y un argumento de giro para que sea doble o invariante.



El centro de giro es el centro del hexágono y el argumento puede ser: 60° , 120° , 180° , 240° y 300°

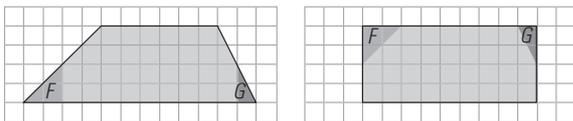
APLICA TUS COMPETENCIAS

63. ¿Qué movimientos hay que aplicar a la figura *F* para transformar un romboide en un rectángulo que tiene la misma base y la misma altura?



Una traslación de vector: $\vec{v}(9, 0)$

64. ¿Qué movimientos hay que aplicar a las figuras *Fy G* para transformar un trapecio en un rectángulo que tiene por base la media de las dos bases del trapecio y por altura la misma del trapecio?



Una simetría central, de centro el vértice superior o un giro de 180°

COMPRUEBA LO QUE SABES

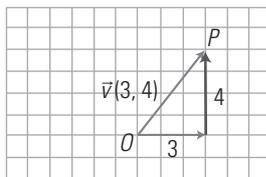
1. Define qué es un vector y di cuáles son sus características. Pon un ejemplo.

Un **vector** es un segmento orientado.

Las características de un vector son:

- a) **Módulo:** es la longitud del vector. Se representa por $|\vec{v}|$
- b) **Dirección:** es la definida por la recta que lo contiene.
- c) **Sentido:** es el indicado por la punta de la flecha.

Ejemplo:



$\vec{v}(3, 4)$ es un vector que tiene una componente horizontal de 3 unidades y una componente vertical de 4 unidades.

O es el origen y *P* el extremo.

a) Módulo: se calcula aplicando el teorema de Pitágoras.

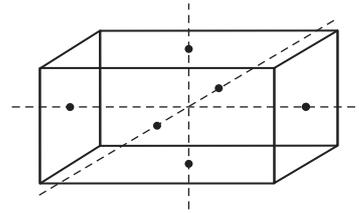
$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ unidades}$$

b) Dirección: es la de la recta que pasa por *O* y *P*

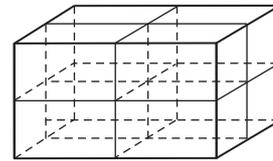
c) Sentido: es el que va de *O* hacia *P*

2. Dibuja un ortoedro y traza los ejes y los planos de simetría.

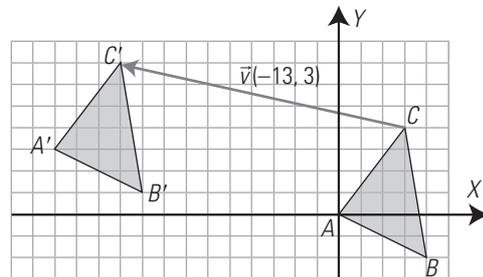
Tiene 3 ejes de simetría que son las rectas perpendiculares que pasan por el centro.



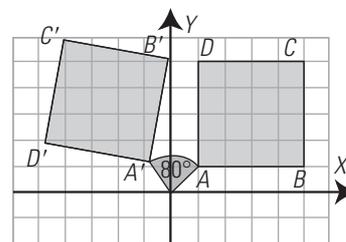
Tiene 3 planos de simetría que son los planos paralelos a las bases que pasan por el centro.



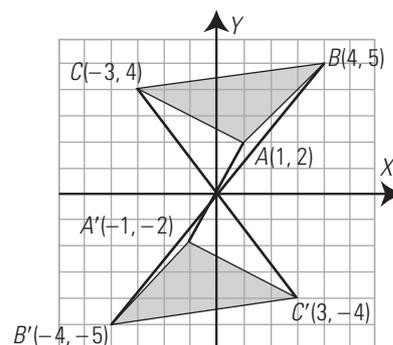
3. Dibuja en unos ejes coordenados el triángulo que tiene los vértices en los puntos *A*(0, 0), *B*(4, -2) y *C*(3, 4) y trasládalo según el vector $\vec{v}(-13, 3)$



4. Dibuja en unos ejes coordenados el cuadrado que tiene los vértices en los puntos *A*(1, 1), *B*(5, 1), *C*(5, 5) y *D*(1, 5), y aplícale un giro de centro el origen *O*(0, 0) y amplitud 80°

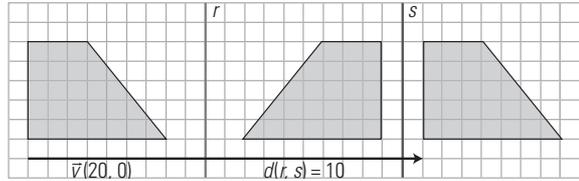
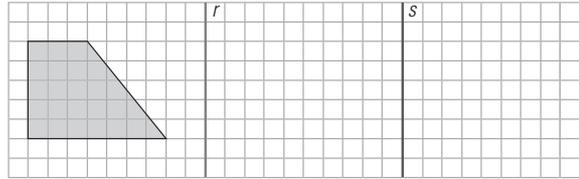
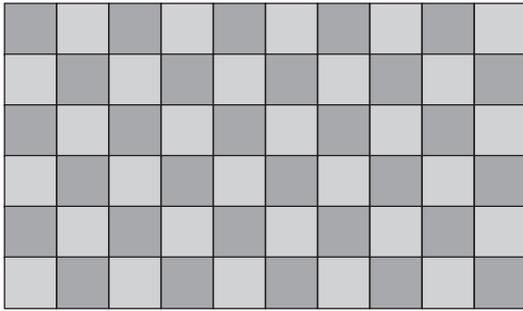


5. Dibuja en unos ejes coordenados el triángulo que tiene los vértices en los puntos *A*(1, 2), *B*(4, 5) y *C*(-3, 4), y aplícale una simetría central de centro el origen *O*(0, 0)

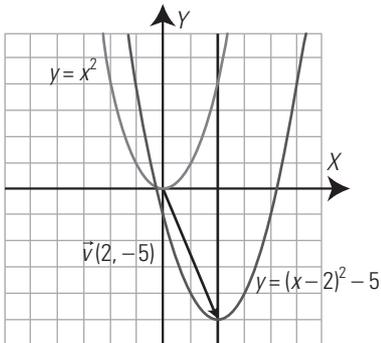
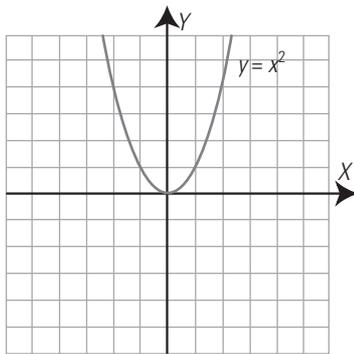


6. Dibuja un mosaico regular.

Solución abierta, por ejemplo:



7. Dada la parábola del dibujo, trasládala según el vector $\vec{v}(2, -5)$. Escribe la nueva ecuación de la parábola.



$y = x^2 - 4x + 1$

8. Dibuja el simétrico del trapecio respecto de la recta r y después el simétrico del obtenido respecto de la recta s . ¿A qué movimiento corresponde la composición de las dos simetrías?

La composición de las dos traslaciones corresponde a una traslación; el vector tiene de módulo el doble de la distancia que hay entre los dos ejes; la dirección es perpendicular a los ejes, y el sentido va del primer eje al segundo.

WINDOWS/LINUX GEOGEBRA 

PASO A PASO

65. Traslada un triángulo.

Resuelto en el libro del alumnado.

66. Gira un triángulo.

Resuelto en el libro del alumnado.

PRACTICA

67. Dibuja un pentágono regular. Haz el simétrico del pentágono respecto del centro O

Resuelto en el libro del alumnado.

68. Dibuja un eje de simetría axial, r , y una pajarita y haz la simétrica respecto de la recta r

Resuelto en el libro del alumnado.

69. Genera un *applet* con GeoGebra del dibujo Traslación.ggb del ejercicio 65

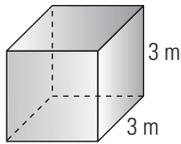
Resuelto en el libro del alumnado.

12. Áreas y volúmenes

1. ÁREA Y VOLUMEN DE CUERPOS EN EL ESPACIO

PIENSA Y CALCULA

Calcula mentalmente el área y el volumen de un cubo de 3 m de arista.



$$\begin{aligned} \text{Área: } & 6 \cdot 3^2 = 54 \text{ m}^2 \\ \text{Volumen: } & 3^3 = 27 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

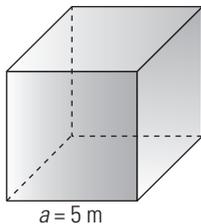
CARNÉ CALCULISTA

Desarrolla: $(3x + \sqrt{5})(3x - \sqrt{5}) = 9x^2 - 5$

Factoriza: $4x^2 + 2x + \frac{1}{4} = \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2$

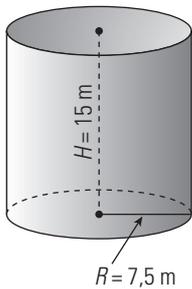
APLICA LA TEORÍA

1. Calcula mentalmente el área y el volumen de un cubo de 5 m de arista.



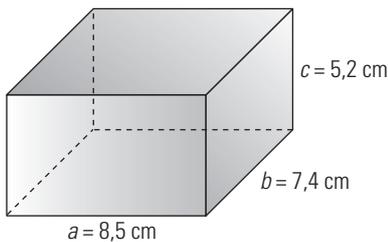
$$\begin{aligned} \text{Área: } & A = 6a^2 \\ & A = 6 \cdot 5^2 = 150 \text{ m}^2 \\ \text{Volumen: } & V = a^3 \\ & V = 5^3 = 125 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

2. Calcula el área y el volumen de un cilindro recto cuya base mide 7,5 m de radio y cuya altura es el doble del radio de la base.



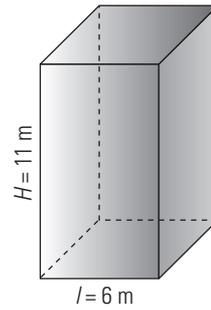
$$\begin{aligned} A_B &= \pi R^2 \\ A_B &= \pi \cdot 7,5^2 = 176,71 \text{ m}^2 \\ A_L &= 2\pi RH \\ A_L &= 2 \cdot \pi \cdot 7,5 \cdot 15 = 706,86 \text{ m}^2 \\ A_T &= 2A_B + A_L \\ A_T &= 2 \cdot 176,71 + 706,86 = \\ &= 1060,28 \text{ m}^2 \\ V &= A_B \cdot H \\ V &= 176,71 \cdot 15 = 2650,72 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

3. Calcula el área y el volumen de un ortoedro cuyas aristas miden 8,5 cm, 7,4 cm y 5,2 cm



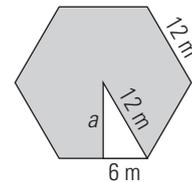
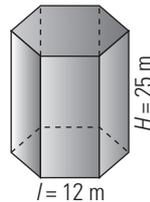
$$\begin{aligned} \text{Área: } & A = 2(ab + ac + bc) \\ & A = 2(8,5 \cdot 7,4 + 8,5 \cdot 5,2 + 7,4 \cdot 5,2) = 291,16 \text{ cm}^2 \\ \text{Volumen: } & V = abc \\ & V = 8,5 \cdot 7,4 \cdot 5,2 = 327,08 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

4. Calcula el área y el volumen de un prisma cuadrangular en el que la arista de la base mide 6 m y su altura es de 11 m



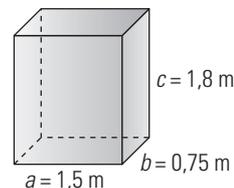
$$\begin{aligned} A_B &= l^2 \\ A_B &= 6^2 = 36 \text{ m}^2 \\ A_L &= 4l \cdot H \\ A_L &= 4 \cdot 6 \cdot 11 = 264 \text{ m}^2 \\ A_T &= 2A_B + A_L \\ A_T &= 2 \cdot 36 + 264 = 336 \text{ m}^2 \\ V &= A_B \cdot H \\ V &= 36 \cdot 11 = 396 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

5. Calcula el área y el volumen de un prisma hexagonal en el que la arista de la base mide 12 m y su altura es de 25 m



$$\begin{aligned} a &= \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 10,39 \text{ m} \\ A_B &= \frac{P \cdot a}{2} \Rightarrow A_B = 6 \cdot 12 \cdot 10,39 : 2 = 374,04 \text{ m}^2 \\ A_L &= 6l \cdot H \Rightarrow A_L = 6 \cdot 12 \cdot 25 = 1800 \text{ m}^2 \\ A_T &= 2A_B + A_L \\ A_T &= 2 \cdot 374,04 + 1800 = 2548,08 \text{ m}^2 \\ V &= A_B \cdot H \Rightarrow V = 374,04 \cdot 25 = 9351 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

6. El depósito de gasoil de un sistema de calefacción tiene forma de ortoedro, cuyas dimensiones en metros son 1,5 m × 0,75 m × 1,8 m. Calcula cuánto cuesta llenarlo si el precio de cada litro de gasoil es 0,55 €. Si la calefacción consume uniformemente todo el gasoil en 120 días, ¿cuánto se gasta diariamente en calefacción?

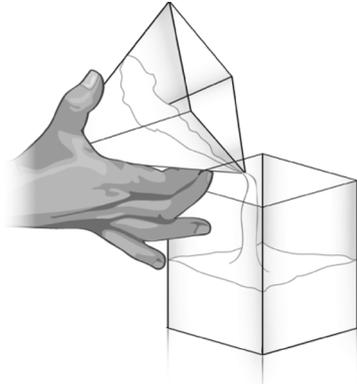


$$\begin{aligned} \text{Cuesta: } & 1,5 \cdot 0,75 \cdot 1,8 \cdot 1000 \cdot 0,55 = 1113,75 \text{ €} \\ \text{Gasta diariamente: } & 1113,75 : 120 = 9,28 \text{ €} \end{aligned}$$

2. ÁREA Y VOLUMEN DE PIRÁMIDES Y CONOS

PIENSA Y CALCULA

a) Tienes un recipiente vacío en forma de prisma y otro en forma de pirámide, con la misma base y la misma altura. Compara la fórmula del volumen del prisma con la de la pirámide, y calcula cuántas veces tienes que llenar de sal la pirámide y echarla en el prisma para llenarlo.



b) Tienes un recipiente vacío en forma de cilindro y otro en forma de cono, con la misma base y la misma altura. Compara la fórmula del volumen del cilindro con la del cono, y calcula cuántas veces tienes que llenar de sal el cono y echarla en el cilindro para llenarlo.

- a) Tres veces.
- b) Tres veces.

CARNÉ CALCULISTA

Resuelve la ecuación:

$$\frac{x^2 - 5}{2} = x - 3$$

$$x_1 = x_2 = 1$$

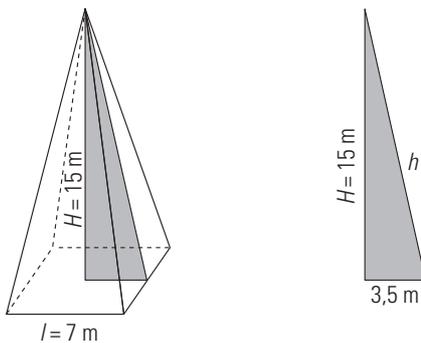
APLICA LA TEORÍA

7. Calcula el área y el volumen de una pirámide cuadrangular cuya base tiene 7 m de arista y cuya altura mide 15 m

$$A_B = l^2$$

$$A_B = 7^2 = 49 \text{ m}^2$$

Tenemos que hallar la apotema de la pirámide aplicando el teorema de Pitágoras:



$$h = \sqrt{15^2 + 3,5^2} = \sqrt{237,25} = 15,40 \text{ m}$$

$$A_L = 4 \cdot \frac{l \cdot h}{2}$$

$$A_L = 4 \cdot 7 \cdot 15,4 : 2 = 215,6 \text{ m}^2$$

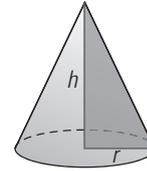
$$A_T = A_B + A_L$$

$$A_T = 49 + 215,6 = 264,6 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

$$V = 49 \cdot 15 : 3 = 245 \text{ m}^3$$

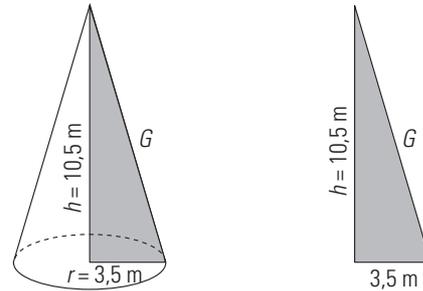
8. Calcula el área y el volumen de un cono recto en el que el radio de la base mide 3,5 m y la altura es el triple de dicho radio.



$$A_B = \pi r^2$$

$$A_B = \pi \cdot 3,5^2 = 38,48 \text{ m}^2$$

Tenemos que hallar la generatriz aplicando el teorema de Pitágoras:



$$G = \sqrt{10,5^2 + 3,5^2} = \sqrt{122,5} = 11,07 \text{ m}$$

$$A_L = \pi r G$$

$$A_L = \pi \cdot 3,5 \cdot 11,07 = 121,72 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_B + A_L$$

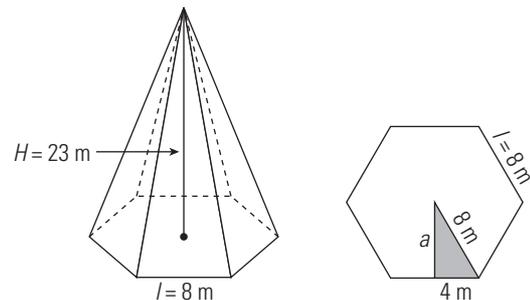
$$A_T = 38,48 + 121,72 = 160,2 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h$$

$$V = 38,48 \cdot 10,5 : 3 = 134,68 \text{ m}^3$$

9. Calcula el área y el volumen de una pirámide hexagonal cuya base tiene una arista de 8 m y cuya altura es de 23 m

Tenemos que hallar la apotema de la base aplicando el teorema de Pitágoras:

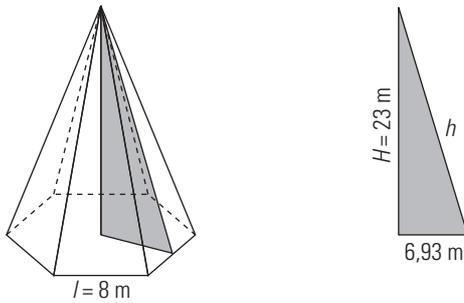


$$a = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 6,93 \text{ m}$$

$$A_B = \frac{P \cdot a}{2}$$

$$A_B = 6 \cdot 8 \cdot 6,93 : 2 = 166,32 \text{ m}^2$$

Tenemos que hallar la apotema de la pirámide aplicando el teorema de Pitágoras:



$$h = \sqrt{23^2 + 6,93^2} = \sqrt{577,02} = 24,02 \text{ m}$$

$$A_L = 6 \cdot \frac{l \cdot h}{2}$$

$$A_L = 6 \cdot 8 \cdot 24,02 : 2 = 576,48 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_B + A_L$$

$$A_T = 166,32 + 576,48 = 742,8 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

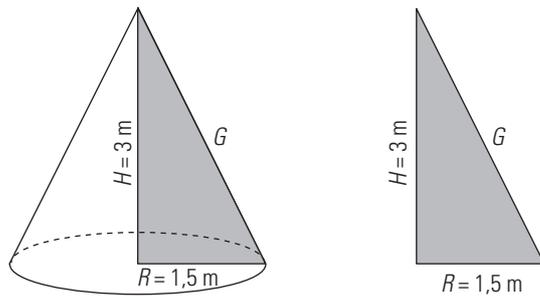
$$V = 166,32 \cdot 23 : 3 = 1275,12 \text{ m}^3$$

10. Una tienda de campaña tiene forma de cono recto; el radio de la base mide 1,5 m y la altura es de 3 m. El metro cuadrado de suelo cuesta 15 €, y el de la parte restante, 7 €. ¿Cuánto cuesta el material para construirla?

$$A_B = \pi R^2$$

$$A_B = \pi \cdot 1,5^2 = 7,07 \text{ m}^2$$

Tenemos que hallar la generatriz aplicando el teorema de Pitágoras:



$$G = \sqrt{1,5^2 + 3^2} = \sqrt{11,25} = 3,35 \text{ m}$$

$$A_L = \pi R G$$

$$A_L = \pi \cdot 1,5 \cdot 3,35 = 15,79 \text{ m}^2$$

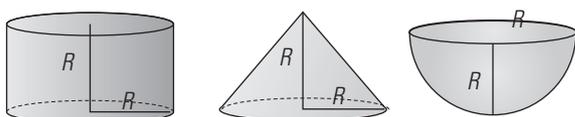
$$\text{Coste} = 7,07 \cdot 15 + 15,79 \cdot 7 = 216,58 \text{ €}$$

3. ÁREA Y VOLUMEN DE TRONCOS Y ESFERA

PIENSA Y CALCULA

Aplicando las fórmulas del volumen:

a) Calcula el volumen de los siguientes cuerpos en función de R: cilindro, cono y semiesfera.



b) El volumen de uno de los cuerpos es igual a la suma de los volúmenes de los otros dos. ¿Cuál es la relación?

a) Volumen del cilindro: πR^3

Volumen del cono: $\frac{1}{3} \pi R^3$

Volumen de la semiesfera: $\frac{2}{3} \pi R^3$

b) Volumen del cilindro = Volumen del cono + Volumen de la semiesfera.

CARNÉ CALCULISTA

Resuelve el sistema:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{3} &= \frac{y}{4} \\ \frac{x-2}{4} &= \frac{y-3}{5} \end{aligned} \right\} x = 6, y = 8$$

APLICA LA TEORÍA

11. Calcula el área y el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular sabiendo que:

- La arista de la base mayor mide 16 m
- La arista de la base menor, 12 m
- La altura mide 20 m

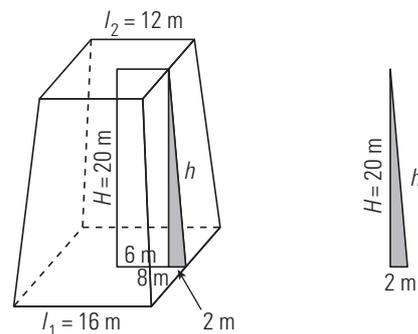
$$A_{B_1} = l_1^2$$

$$A_{B_1} = 16^2 = 256 \text{ m}^2$$

$$A_{B_2} = l_2^2$$

$$A_{B_2} = 12^2 = 144 \text{ m}^2$$

Tenemos que hallar la apotema del tronco de pirámide aplicando el teorema de Pitágoras:



$$h = \sqrt{20^2 + 2^2} = \sqrt{404} = 20,10 \text{ m}$$

$$A_L = 4 \cdot \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot h$$

$$A_L = 4 \cdot \frac{16 + 12}{2} \cdot 20,1 = 1125,6 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L$$

$$A_T = 256 + 144 + 1125,6 = 1525,6 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{1}{3} (A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}) \cdot H$$

$$V = (256 + 144 + \sqrt{256 \cdot 144}) \cdot 20 : 3 = 3946,67 \text{ m}^3$$

12. Calcula el área y el volumen de un tronco de cono sabiendo que el radio de la base mayor mide 7 m; el de la base menor, 4 m; y la altura, 11 m

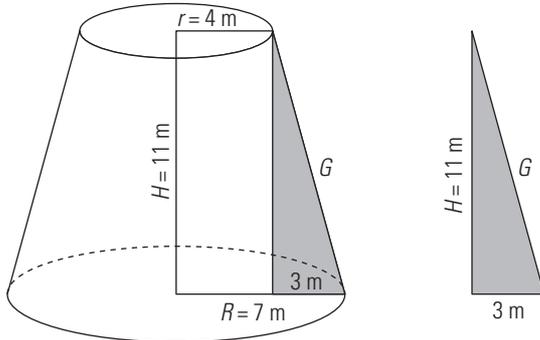
$$A_{B_1} = \pi \cdot R^2$$

$$A_{B_1} = \pi \cdot 7^2 = 153,94 \text{ m}^2$$

$$A_{B_2} = \pi \cdot r^2$$

$$A_{B_2} = \pi \cdot 4^2 = 50,27 \text{ m}^2$$

Tenemos que hallar la generatriz del tronco de cono aplicando el teorema de Pitágoras:



$$G = \sqrt{11^2 + 3^2} = \sqrt{130} = 11,40 \text{ m}$$

$$A_L = \pi (R + r) \cdot G$$

$$A_L = \pi \cdot (7 + 4) \cdot 11,4 = 393,96 \text{ m}^2$$

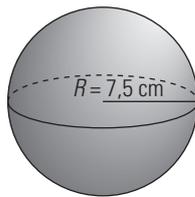
$$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L$$

$$A_T = 153,94 + 50,27 + 393,96 = 598,17 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{1}{3} (A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}) \cdot H$$

$$V = (153,94 + 50,27 + \sqrt{153,94 \cdot 50,27}) \cdot 11 : 3 = 1071,32 \text{ m}^3$$

13. Calcula el área y el volumen de una esfera cuyo radio mide 7,5 m



$$A = 4\pi R^2$$

$$A = 4\pi \cdot 7,5^2 = 706,86 \text{ m}^2$$

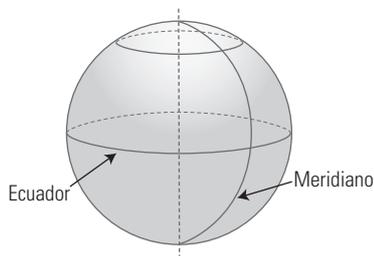
$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$V = 4 : 3 \cdot \pi \cdot 7,5^3 = 1\,767,15 \text{ m}^3$$

4. LA ESFERA Y EL GLOBO TERRÁQUEO

PIENSA Y CALCULA

Sabiendo que un metro es la diezmilésima parte del cuadrante de un meridiano terrestre, y suponiendo que el globo terráqueo es una esfera perfecta, calcula la longitud de un meridiano y la longitud del Ecuador. Exprésalo en kilómetros.



Longitud de cada uno: $4 \cdot 10\,000\,000 = 40\,000\,000 \text{ m} = 40\,000 \text{ km}$

CARNÉ CALCULISTA

Calcula la altura de un triángulo isósceles en el que los lados iguales miden 7,4 metros y el desigual 4,5 m
 $h = 5,87 \text{ m}$

APLICA LA TEORÍA

14. Expresa de forma aproximada en grados y minutos la longitud y la latitud de: Sevilla, Ourense, Castellón y Albacete.



Sevilla: 6° O, 37° 30' N Ourense: 8° O, 42° 30' N
 Castellón: 0° O, 40° N Albacete: 2° O, 39° N

15. Si la longitud del Ecuador es de unos 40 000 km, calcula la distancia que se recorre sobre el Ecuador al avanzar 1° en longitud.

$$40\,000 : 360 = 111,11 \text{ km}$$

16. Busca en el mapa las ciudades cuyas coordenadas geográficas son las siguientes:

- a) 2° 28' O 36° 50' N
- b) 3° 41' O 40° 24' N
- c) 4° 25' O 36° 43' N
- d) 5° 34' O 42° 36' N

- a) Almería. b) Madrid.
- c) Málaga. d) León.

17. Si la longitud de un meridiano es de unos 40 000 km, calcula la distancia que se recorre sobre un meridiano al avanzar 1° en latitud.

$$40\,000 : 360 = 111,11 \text{ km}$$

18. Calcula de forma aproximada la distancia que hay entre las localidades de Dos Hermanas (Sevilla) y Avilés (Asturias) si las coordenadas geográficas de ambas localidades son más o menos las siguientes:

- Dos Hermanas: 5° 55' O, 37° 17' N
- Avilés: 5° 55' O, 43° 33' N

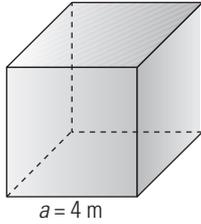
$$43^\circ 33' - 37^\circ 17' = 6^\circ 16' = 6,27^\circ$$

$$40\,000 : 360^\circ \cdot 6,27^\circ = 696,67 \text{ km}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

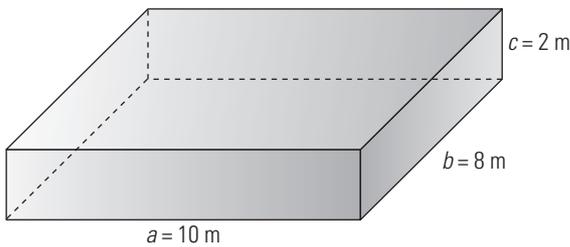
1. ÁREA Y VOLUMEN DE CUERPOS EN EL ESPACIO

19. Calcula mentalmente el área y el volumen de un cubo de 4 m de arista.



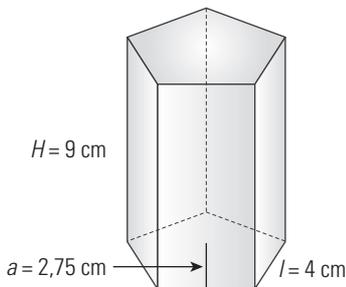
Área:
 $A = 6a^2$
 $A = 6 \cdot 4^2 = 96 \text{ m}^2$
 Volumen:
 $V = a^3$
 $V = 4^3 = 64 \text{ m}^3$

20. Calcula mentalmente el área y el volumen de un ortoedro cuyas aristas miden 10 m, 8 m y 2 m



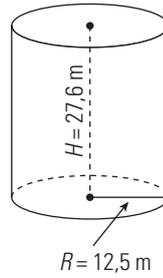
Área:
 $A = 2(ab + ac + bc)$
 $A = 2(10 \cdot 8 + 10 \cdot 2 + 8 \cdot 2) = 232 \text{ m}^2$
 Volumen:
 $V = abc$
 $V = 10 \cdot 8 \cdot 2 = 160 \text{ m}^3$

21. Calcula el área y el volumen del prisma pentagonal del siguiente dibujo:



$A_B = \frac{P \cdot a}{2}$
 $A_B = 5 \cdot 4 \cdot 2,75 : 2 = 27,5 \text{ cm}^2$
 $A_L = 5l \cdot H \Rightarrow A_L = 5 \cdot 4 \cdot 9 = 180 \text{ cm}^2$
 $A_T = 2A_B + A_L \Rightarrow A_T = 2 \cdot 27,5 + 180 = 235 \text{ cm}^2$
 $V = A_B \cdot H \Rightarrow V = 27,5 \cdot 9 = 247,5 \text{ cm}^3$

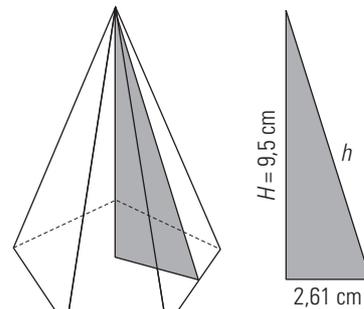
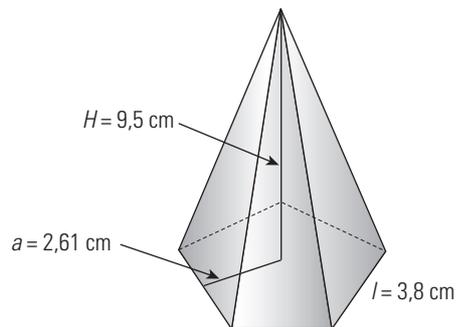
22. Calcula el área y el volumen de un cilindro recto en el que el radio de la base mide 12,5 m y cuya altura es de 27,6 m



$A_B = \pi R^2$
 $A_B = \pi \cdot 12,5^2 = 490,87 \text{ m}^2$
 $A_L = 2\pi RH$
 $A_L = 2 \cdot \pi \cdot 12,5 \cdot 27,6 = 2167,70 \text{ m}^2$
 $A_T = 2A_B + A_L$
 $A_T = 2 \cdot 490,87 + 2167,7 = 3149,44 \text{ m}^2$
 $V = A_B \cdot H$
 $V = 490,87 \cdot 27,6 = 13548,12 \text{ m}^3$

2. ÁREA Y VOLUMEN DE PIRÁMIDES Y CONOS

23. Calcula el área y el volumen de la pirámide pentagonal del siguiente dibujo:



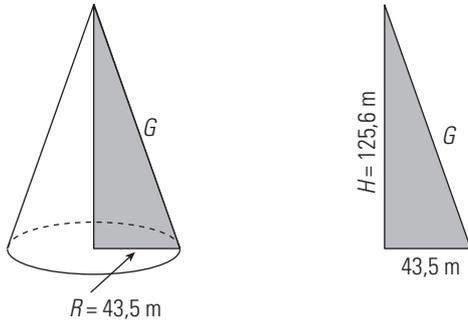
$A_B = \frac{P \cdot a}{2}$
 $A_B = 5 \cdot 3,8 \cdot 2,61 : 2 = 24,80 \text{ cm}^2$
 Tenemos que hallar la apotema de la pirámide aplicando el teorema de Pitágoras:
 $h = \sqrt{2,61^2 + 9,5^2} = \sqrt{97,06} = 9,85 \text{ m}$
 $A_L = 5 \cdot \frac{l \cdot h}{2}$
 $A_L = 5 \cdot 3,8 \cdot 9,85 : 2 = 93,58 \text{ cm}^2$
 $A_T = A_B + A_L$
 $A_T = 24,8 + 93,58 = 118,38 \text{ cm}^2$
 $V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$
 $V = 24,8 \cdot 9,5 : 3 = 78,53 \text{ cm}^3$

24. Calcula el área y el volumen de un cono recto en el que el radio de la base mide 43,5 m y cuya altura es de 125,6 m

$$A_B = \pi R^2$$

$$A_B = \pi \cdot 43,5^2 = 5\,944,68 \text{ m}^2$$

Tenemos que hallar la generatriz aplicando el teorema de Pitágoras:



$$G = \sqrt{43,5^2 + 125,6^2} = \sqrt{17\,667,61} = 132,92 \text{ m}$$

$$A_L = \pi R G$$

$$A_L = \pi \cdot 43,5 \cdot 132,92 = 18\,164,75 \text{ m}^2$$

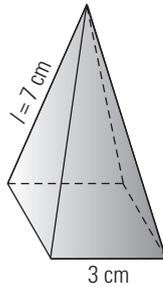
$$A_T = A_B + A_L$$

$$A_T = 5\,944,68 + 18\,164,75 = 24\,109,43 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

$$V = 5\,944,68 \cdot 125,6 : 3 = 248\,883,94 \text{ m}^3$$

25. Calcula el valor de una pieza de acero con forma de pirámide cuadrangular en la que la arista de la base mide 3 cm y la arista lateral 7 cm. El precio de las piezas es de 40 €/kg. La densidad del acero es 7,85 kg/L



Tenemos que hallar el volumen:

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

$$A_B = l^2 \Rightarrow A_B = 3^2 = 9 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 7 = 21 \text{ cm}^3 = 0,021 \text{ dm}^3 = 0,021 \text{ L}$$

$$\text{Masa} = 0,021 \cdot 7,85 = 0,16 \text{ kg}$$

$$\text{Valor} = 0,16 \cdot 40 = 6,4 \text{ €}$$

3. ÁREA Y VOLUMEN DE TRONCOS Y ESFERA

26. Calcula el área y el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular sabiendo que la arista de la base mayor mide 15 cm; la arista de la base menor, 9 cm; y la altura, 10 cm

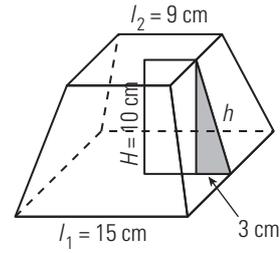
$$A_{B_1} = l_1^2$$

$$A_{B_1} = 15^2 = 225 \text{ cm}^2$$

$$A_{B_2} = l_2^2$$

$$A_{B_2} = 9^2 = 81 \text{ cm}^2$$

Tenemos que hallar la apotema del tronco de pirámide aplicando el teorema de Pitágoras:



$$h = \sqrt{10^2 + 3^2} = \sqrt{109} = 10,44 \text{ m}$$

$$A_L = 4 \cdot \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot h$$

$$A_L = 4 \cdot \frac{15 + 9}{2} \cdot 10,44 = 501,12 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L$$

$$A_T = 225 + 81 + 501,12 = 807,12 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} (A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}) \cdot H$$

$$V = (225 + 81 + \sqrt{225 \cdot 81}) \cdot 10 : 3 = 1\,470 \text{ m}^3$$

27. Calcula el área y el volumen de un tronco de cono sabiendo que el radio de la base mayor mide 4 m, el de la base menor es la mitad y la altura es 7 m

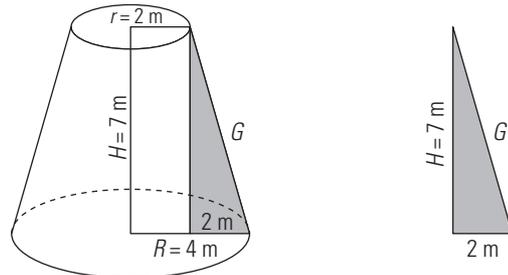
$$A_{B_1} = \pi R^2$$

$$A_{B_1} = \pi \cdot 4^2 = 50,27 \text{ m}^2$$

$$A_{B_2} = \pi r^2$$

$$A_{B_2} = \pi \cdot 2^2 = 12,57 \text{ m}^2$$

Tenemos que hallar la generatriz del tronco de cono aplicando el teorema de Pitágoras:



$$G = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53} = 7,28 \text{ m}$$

$$A_L = \pi(R + r) \cdot G$$

$$A_L = \pi \cdot (4 + 2) \cdot 7,28 = 137,22 \text{ m}^2$$

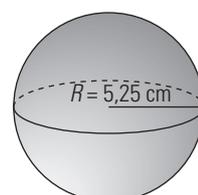
$$A_T = A_{B_1} + A_{B_2} + A_L$$

$$A_T = 50,27 + 12,57 + 137,22 = 200,06 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{1}{3} (A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}) \cdot H$$

$$V = (50,27 + 12,57 + \sqrt{50,27 \cdot 12,57}) \cdot 7 : 3 = 205,28 \text{ m}^3$$

28. Calcula el área y el volumen de una esfera cuyo radio mide 5,25 cm



$$A = 4\pi R^2$$

$$A = 4\pi \cdot 5,25^2 = 346,36 \text{ cm}^2$$

$$V = 4/3\pi R^3$$

$$V = 4 : 3 \cdot \pi \cdot 5,25^3 = 606,13 \text{ cm}^3$$

29. Las dimensiones en centímetros de un cartón de leche de un litro son $9,5 \times 6,4 \times 16,5$. Si lo construyésemos de forma esférica, ¿cuántos centímetros cuadrados de cartón ahorráramos?

Área del cartón de leche:

$$2(9,5 \cdot 6,4 + 9,5 \cdot 16,5 + 6,4 \cdot 16,5) = 646,3 \text{ cm}^2$$

Radio de una esfera de volumen un litro.

$$\frac{4\pi R^3}{3} = 1 \Rightarrow R^3 = \frac{4\pi}{3}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = 0,62 \text{ dm} = 6,2 \text{ cm}$$

Área de la esfera de un litro:

$$A = 4\pi \cdot 6,2^2 = 483,05 \text{ cm}^2$$

Ahorráramos: $646,3 - 483,05 = 163,25 \text{ cm}^2$

4. LA ESFERA Y EL GLOBO TERRÁQUEO

30. Expresa de forma aproximada la longitud y la latitud de Valencia y Zaragoza.



Valencia: $30^\circ \text{ O}, 39^\circ 30' \text{ N}$

Zaragoza: $1^\circ \text{ O}, 41^\circ 30' \text{ N}$

31. Busca en el mapa anterior las ciudades cuyas coordenadas geográficas son las siguientes:

a) $1^\circ 52' \text{ O } 39^\circ \text{ N}$

b) $2^\circ 11' \text{ E } 41^\circ 23' \text{ N}$

c) $8^\circ 39' \text{ O } 42^\circ 26' \text{ N}$

d) $3^\circ 47' \text{ O } 37^\circ 46' \text{ N}$

a) Albacete. b) Barcelona.

c) Pontevedra. d) Jaén.

32. Calcula la distancia que hay entre las localidades de Carmona (Sevilla) y Aller (Asturias) si las coordenadas geográficas de ambas localidades son:

• Carmona: $5^\circ 38' \text{ O}, 43^\circ 10' \text{ N}$

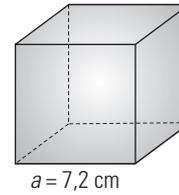
• Aller: $5^\circ 38' \text{ O}, 37^\circ 28' \text{ N}$

$$43^\circ 10' - 37^\circ 28' = 5^\circ 42' = 5,7^\circ$$

$$40\,000 : 360^\circ \cdot 5,7^\circ = 633,33 \text{ km}$$

PARA AMPLIAR

33. Calcula el área y el volumen de un cubo de arista $7,2 \text{ cm}$



Área:

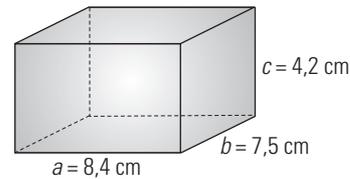
$$A = 6 \cdot a^2 \Rightarrow A = 6 \cdot 7,2^2 = 311,04 \text{ cm}^2$$

Volumen:

$$V = a^3$$

$$V = 7,2^3 = 373,25 \text{ cm}^3$$

34. Calcula el área y el volumen de un ortoedro de $a = 8,4 \text{ cm}$, $b = 7,5 \text{ cm}$ y $c = 4,2 \text{ cm}$



Área:

$$A = 2(ab + ac + bc)$$

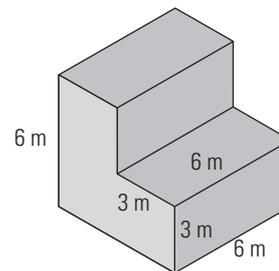
$$A = 2(8,4 \cdot 7,5 + 8,4 \cdot 4,2 + 7,5 \cdot 4,2) = 259,56 \text{ cm}^2$$

Volumen:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = 8,4 \cdot 7,5 \cdot 4,2 = 264,6 \text{ cm}^3$$

35. Halla el área de la siguiente figura:



Parte de abajo: $6 \cdot 6 = 36 \text{ m}^2$

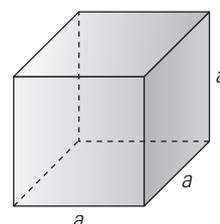
Parte de atrás: $6 \cdot 6 = 36 \text{ m}^2$

Parte izquierda = parte derecha = $6 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = 36 - 9 = 27 \text{ m}^2$

Frontal: $4 \cdot 6 \cdot 3 = 72 \text{ m}^2$

Total: $2 \cdot 36 + 2 \cdot 27 + 72 = 198 \text{ m}^2$

36. Calcula la arista de un cubo de 85 m^2 de área redondeando el resultado a dos decimales.



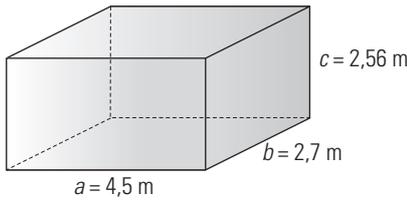
Área:

$$A_b = 6a^2 = 85 \text{ m}^2$$

Arista:

$$a = \sqrt{85 : 6} = 3,76 \text{ m}$$

37. Calcula el área y el volumen del siguiente ortoedro:



Área:

$$A = 2(ab + ac + bc)$$

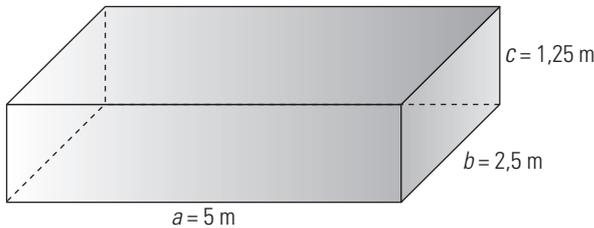
$$A = 2(4,5 \cdot 2,7 + 4,5 \cdot 2,56 + 2,7 \cdot 2,56) = 61,16 \text{ m}^2$$

Volumen:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = 4,5 \cdot 2,7 \cdot 2,56 = 31,1 \text{ m}^3$$

38. Calcula el área y el volumen de un ortoedro sabiendo que sus aristas forman una progresión geométrica decreciente de razón 1/2 y que la arista mayor mide 5 m



Área:

$$A = 2(ab + ac + bc)$$

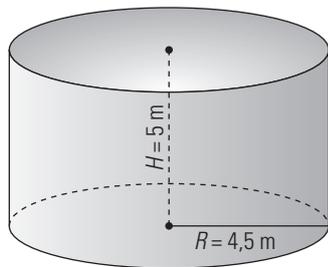
$$A = 2(5 \cdot 2,5 + 5 \cdot 1,25 + 2,5 \cdot 1,25) = 43,75 \text{ m}^2$$

Volumen:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = 5 \cdot 2,5 \cdot 1,25 = 15,63 \text{ m}^3$$

39. A un tarro de miel que tiene forma cilíndrica queremos ponerle una etiqueta que lo rodee completamente. El diámetro del tarro mide 9 cm y la altura de la etiqueta es de 5 cm. Calcula el área de la etiqueta.



$$A_L = 2\pi R \cdot H$$

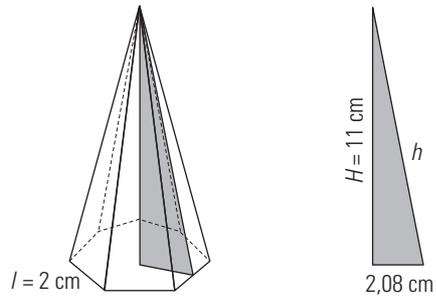
$$A_L = 2\pi \cdot 4,5 \cdot 5 = 141,37 \text{ cm}^2$$

40. Calcula el área y el volumen de una pirámide heptagonal en la que la arista de la base mide 2 cm; la apotema, 2,08 cm; y la altura, 11 cm

$$A_B = \frac{P \cdot a}{2}$$

$$A_B = \frac{7 \cdot 2 \cdot 2,08}{2} = 14,56 \text{ cm}^2$$

Tenemos que hallar la apotema de la pirámide aplicando el teorema de Pitágoras:



$$h = \sqrt{2,08^2 + 11^2} = \sqrt{125,33} = 11,19 \text{ cm}$$

$$A_L = 7 \cdot \frac{l \cdot h}{2}$$

$$A_L = 7 \cdot 2 \cdot 11,19 : 2 = 78,33 \text{ cm}^2$$

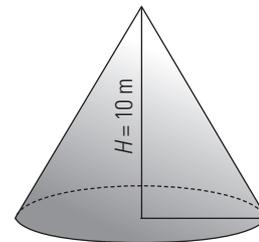
$$A_T = A_B + A_L$$

$$A_T = 14,56 + 78,33 = 92,89 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

$$V = 14,56 \cdot 11 : 3 = 53,39 \text{ cm}^3$$

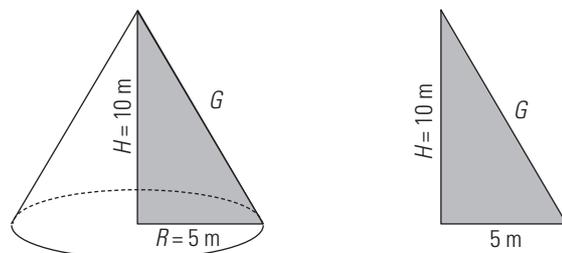
41. Calcula el área y el volumen de un cono recto en el que el diámetro de la base es igual a la altura, que mide 10 m



$$A_B = \pi R^2$$

$$A_B = \pi \cdot 5^2 = 78,54 \text{ m}^2$$

Tenemos que hallar la generatriz aplicando el teorema de Pitágoras.



$$G = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 11,18 \text{ m}$$

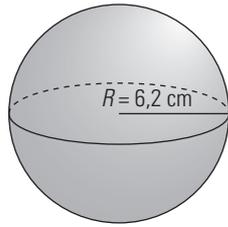
$$A_L = \pi R G$$

$$A_L = \pi \cdot 5 \cdot 11,18 = 175,62 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_B + A_L; A_T = 78,54 + 175,62 = 254,16 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H; V = 78,54 \cdot 10 : 3 = 261,8 \text{ m}^3$$

42. Calcula el radio de una esfera de volumen 1 litro.

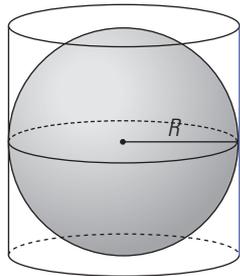


$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\frac{4\pi R^3}{3} = 1 \Rightarrow R^3 = \frac{3}{4\pi}$$

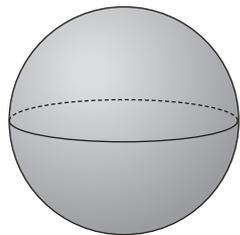
$$R = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = 0,62 \text{ dm} = 6,2 \text{ cm}$$

43. Una esfera de 4 cm de diámetro está inscrita en un cilindro. ¿Cuál es la altura del cilindro?



Altura del cilindro = Diámetro de la esfera = 4 cm

44. Halla el área y el volumen de una esfera de radio 6 400 km. Da el resultado en notación científica.



$$\text{Área} = 4\pi R^2$$

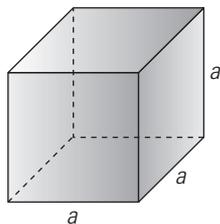
$$A = 4\pi \cdot 6\,400^2 = 5,15 \cdot 10^8 \text{ km}^2$$

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6\,400^3 = 1,10 \cdot 10^{12} \text{ km}^3$$

CON CALCULADORA

45. Calcula la arista de un cubo cuyo volumen mide 2 m³, redondeando el resultado a dos decimales.



Volumen:

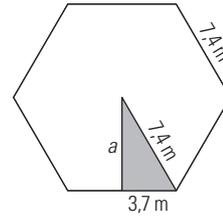
$$V = a^3$$

Arista:

$$a = \sqrt[3]{2} = 1,26 \text{ m}$$

46. Calcula el área y el volumen de una pirámide hexagonal en la que la arista de la base mide 7,4 m y la altura tiene 17,9 m

Tenemos que hallar la apotema de la base aplicando el teorema de Pitágoras:

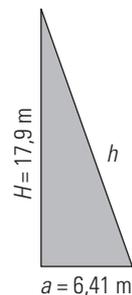
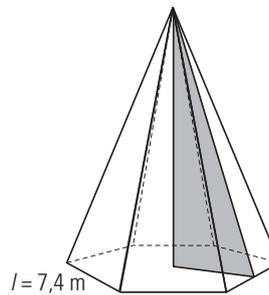


$$a = \sqrt{7,4^2 - 3,7^2} = \sqrt{41,07} = 6,41 \text{ m}$$

$$A_B = \frac{P \cdot a}{2}$$

$$A_B = \frac{6 \cdot 7,4 \cdot 6,41}{2} = 142,3 \text{ m}^2$$

Tenemos que hallar la apotema de la pirámide aplicando el teorema de Pitágoras:



$$h = \sqrt{6,41^2 + 17,9^2} = \sqrt{361,5} = 19,01 \text{ m}$$

$$A_L = 6 \cdot \frac{l \cdot h}{2}$$

$$A_L = 6 \cdot \frac{7,4 \cdot 19,01}{2} = 422,02 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_B + A_L$$

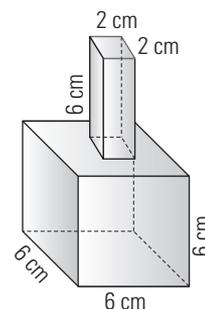
$$A_T = 142,3 + 422,02 = 564,32 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

$$V = 142,3 \cdot 17,9 : 3 = 849,06 \text{ m}^3$$

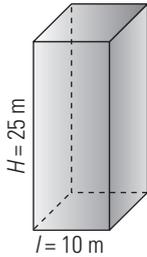
PROBLEMAS

47. Calcula el volumen de la siguiente pieza:



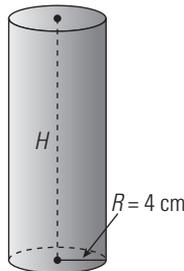
$$\text{Volumen: } 6^3 + 2^2 \cdot 6 = 240 \text{ cm}^3$$

48. Un silo, que es un edificio para almacenar cereales, tiene forma de prisma cuadrangular. Si la arista de la base mide 10 m y la altura es de 25 m, ¿qué volumen contiene?



Volumen:
 $V = A_B \cdot H$
 $V = 10 \cdot 10 \cdot 25 = 2500 \text{ m}^3$

49. Calcula la altura que ha de tener un bote de conservas de un litro, sabiendo que el diámetro de la base mide 8 cm

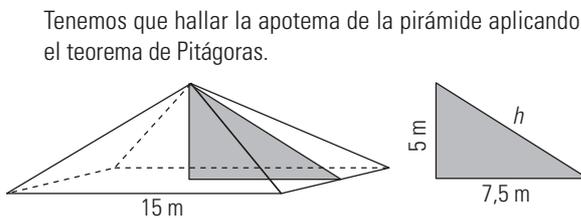


Área de la base:
 $A_B = \pi R^2$
 $A_B = \pi \cdot 4^2 = 50,27 \text{ cm}^2$
 $V = A_B \cdot H \Rightarrow H = \frac{V}{A_B}$
 $H = 1000 : 50,27 = 19,89 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$

50. Las dimensiones en centímetros de un cartón de leche de un litro son: $9,5 \times 6,4 \times 16,5$. Si lo construyésemos de forma cúbica, ¿cuántos centímetros cuadrados de cartón ahorraríamos?

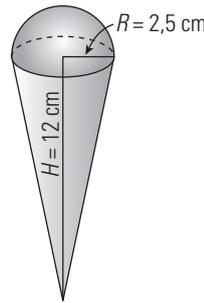
Superficie del cartón:
 $2(9,5 \cdot 6,4 + 9,5 \cdot 16,5 + 6,4 \cdot 16,5) = 646,3 \text{ cm}^2$
 Arista del cubo:
 $a^3 = 1 \text{ dm}^3$
 $a = 1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$
 Superficie del cubo: $6 \cdot 10^2 = 600 \text{ cm}^2$
 Si fuese cúbico nos ahorraríamos:
 $646,3 - 600 = 46,3 \text{ cm}^2$

51. Un tejado tiene forma de pirámide cuadrangular. La arista de su base mide 15 m y la altura es de 5 m. Si reparar un metro cuadrado cuesta 18 €, ¿cuánto costará reparar todo el tejado?



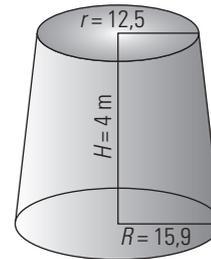
$a = \sqrt{7,5^2 + 5^2} = \sqrt{81,25} = 9,01 \text{ m}$
 $A_L = 4 \cdot 15 \cdot 9,01 : 2 = 270,3 \text{ m}^2$
 Coste: $270,3 \cdot 18 = 4865,4 \text{ €}$

52. En un helado con forma de cono, 1/5 del contenido sobresale del cucurucho. Si el radio de la base del cucurucho mide 2,5 cm y la altura es de 12 cm, ¿cuántos helados se podrán hacer con 10 litros de masa?



Volumen del cucurucho:
 $V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$
 $V = \pi \cdot 2,5^2 \cdot 12 : 3 = 78,54 \text{ cm}^3$
 Volumen del helado:
 $78,54 \cdot (1 + 1/5) = 94,25 \text{ cm}^3$
 N.º de helados:
 $10000 : 94,25 = 106,1$ helados.

53. Calcula el volumen de un trozo de tronco de árbol, en el que el radio de la base mayor mide 15,9 cm; el radio de la base menor, 12,5 cm; y su altura, 4 m

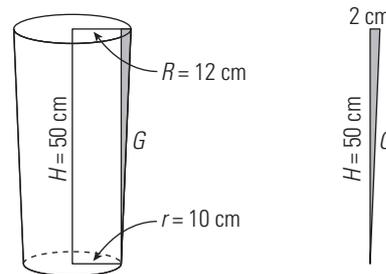


$A_{B_1} = \pi R^2$
 $A_{B_1} = \pi \cdot 15,9^2 = 794,23 \text{ cm}^2$
 $A_{B_2} = \pi r^2$
 $A_{B_2} = \pi \cdot 12,5^2 = 490,87 \text{ cm}^2$
 $V = \frac{1}{3} (A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}) \cdot H$
 $V = (794,23 + 490,87 + \sqrt{794,23 \cdot 490,87}) \cdot 400 : 3 = 254598,75 \text{ cm}^3 = 0,25 \text{ m}^3$

54. Un cubo de basura en forma de tronco de cono tiene las siguientes medidas: radio de la base menor, 10 cm; radio de la base mayor, 12 cm; y altura, 50 cm. Si no tiene tapa, calcula su superficie y su volumen.

$A_{B_1} = \pi r^2$
 $A_{B_1} = \pi \cdot 10^2 = 314,16 \text{ cm}^2$
 $A_{B_2} = \pi R^2$
 $A_{B_2} = \pi \cdot 12^2 = 452,39 \text{ cm}^2$

Tenemos que hallar la generatriz del tronco de cono aplicando el teorema de Pitágoras:



$G = \sqrt{50^2 + 2^2} = \sqrt{2504} = 50,04 \text{ cm}$
 $A_L = \pi(R + r) \cdot G$
 $A_L = \pi \cdot (12 + 10) \cdot 50,04 = 3458,52 \text{ cm}^2$

$$A_T = A_{B_1} + A_L$$

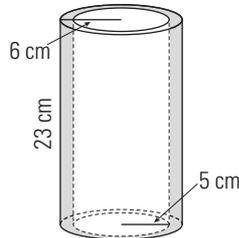
$$A_T = 314,16 + 3458,52 = 3772,68 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}(A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}) \cdot H$$

$$V = \left(314,16 + 452,39 + \sqrt{314,16 \cdot 452,39}\right) \cdot 50 : 3 =$$

$$= 19059,03 \text{ cm}^3 = 19,06 \text{ litros}$$

55. Calcula el volumen de la siguiente pieza:



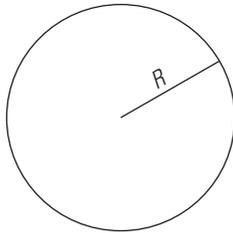
Volumen:

$$V = A_B \cdot H$$

$$V = \pi(6^2 - 5^2) \cdot 23 = 794,82 \text{ cm}^3$$

PARA PROFUNDIZAR

56. Calcula el radio de una circunferencia que mide 37,5 m de longitud.

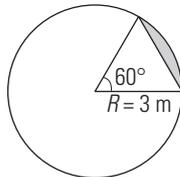


$$L = 2\pi R$$

$$2\pi R = 37,5$$

$$R = \frac{37,5}{2\pi} = 5,97 \text{ m}$$

57. Calcula el área del segmento circular coloreado de amarillo en la siguiente figura:



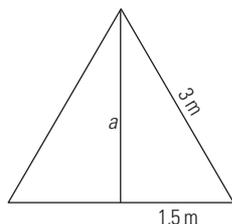
$$A_{\text{segmento}} = A_{\text{sector}} - A_{\text{triángulo}}$$

Área del sector:

$$A = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ$$

$$A = \frac{\pi \cdot 3^2}{360^\circ} \cdot 60^\circ = 4,71 \text{ m}^2$$

Hay que aplicar el teorema de Pitágoras para hallar la altura:

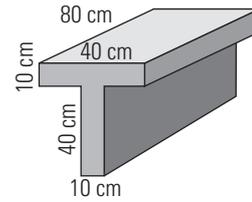


$$a = \sqrt{3^2 - 1,5^2} = \sqrt{6,75} = 2,60 \text{ m}$$

Área del triángulo: $3 \cdot 2,6 : 2 = 3,9 \text{ m}^2$

Área del segmento: $4,71 - 3,9 = 0,81 \text{ m}^2$

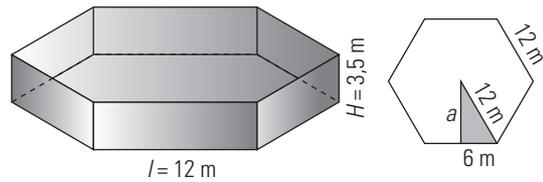
58. Calcula el volumen de la siguiente mesa:



$$V = 10 \cdot 40 \cdot 80 + 10 \cdot 40 \cdot 80 = 64000 \text{ cm}^3 = 0,064 \text{ m}^3$$

59. Una piscina tiene forma de prisma hexagonal. La arista de su base mide 12 m y la altura tiene 3,5 m. ¿Cuánto costará llenarla si el litro de agua tiene un precio de 0,02 €?

Hay que aplicar el teorema de Pitágoras para hallar la apotema de la base:



$$a = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 10,39 \text{ m}$$

$$A_B = \frac{P \cdot a}{2}$$

$$A_B = 6 \cdot 12 \cdot 10,39 : 2 = 374,04 \text{ m}^2$$

$$V = A_B \cdot H$$

$$V = 374,04 \cdot 3,5 = 1309,14 \text{ m}^3 = 1309140 \text{ litros.}$$

$$\text{Coste: } 1309140 \cdot 0,02 = 26182,8 \text{ €}$$

60. Supongamos que un bote de refresco es totalmente cilíndrico y que el diámetro de la base mide 6,5 cm. Si tiene una capacidad de 33 cL, ¿cuánto medirá la altura?



$$A_B = \pi R^2$$

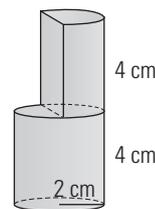
$$A_B = \pi \cdot 3,25^2 = 33,18 \text{ cm}^2 = 0,33 \text{ dm}^2$$

$$33 \text{ cL} = 0,33 \text{ litros} = 0,33 \text{ dm}^3$$

$$V = A_B \cdot H \Rightarrow H = \frac{V}{A_B}$$

$$H = 0,33 : 0,33 = 1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$$

61. Calcula el volumen de la siguiente pieza:



$$V = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 \cdot 1,5 = 75,40 \text{ cm}^3$$

62. Calcula el volumen de la Tierra sabiendo que el radio mide 6400 km. Da el resultado en notación científica.

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$V = 4\pi \cdot 6400^3 : 3 = 1,1 \cdot 10^{12} \text{ km}^3$$

APLICA TUS COMPETENCIAS

63. Calcula el coste de los terrenos que hay que expropiar para hacer una autopista de 50 km con una anchura de 80 m, si se paga a 5 € el metro cuadrado.

Coste: $50\,000 \cdot 80 \cdot 5 = 20\,000\,000 = 20$ millones de €

64. Hay que rebajar un montículo con forma de semiesfera cuyo radio mide 25 m. Calcula el número de viajes que tiene que hacer un camión que lleva cada vez 5 metros cúbicos.

$V = 4\pi \cdot 25^3 : 3 : 2 = 32\,724,92 \text{ m}^3$
 N.º de viajes: $32\,724,92 : 5 = 6\,545$ viajes.

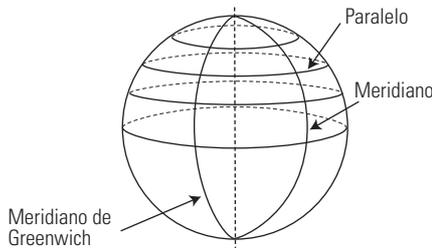
65. Calcula los metros cúbicos totales de asfalto que hay que echar en una autopista si tiene 50 km de longitud y dos direcciones, cada una con una anchura de 20 m. El grosor del asfalto es de 5 cm

Volumen:
 $50\,000 \cdot 20 \cdot 0,05 \cdot 2 = 100\,000 \text{ m}^3$

COMPRUEBA LO QUE SABES

1. Define paralelos y meridianos. Pon un ejemplo haciendo un dibujo y marcando varios de ellos.

Paralelos: son las circunferencias paralelas al Ecuador.
 Meridianos: son las circunferencias máximas que pasan por los polos.

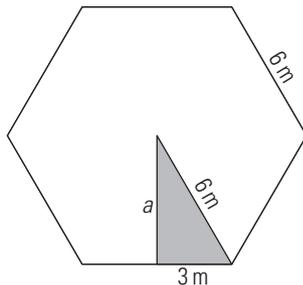


2. Calcula el área y el volumen de un cubo de arista a = 5 m

$A = 6a^2$
 $A = 6 \cdot 5^2 = 6 \cdot 25 = 150 \text{ m}^2$
 $V = a^3$
 $V = 5^3 = 125 \text{ m}^3$

3. Calcula el área de un prisma hexagonal en el que la arista de la base mide 6 m y cuya altura es de 15 m

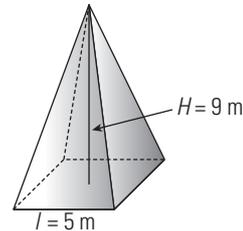
Hay que aplicar el teorema de Pitágoras para hallar la apotema de la base:



$a = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 5,20 \text{ m}$
 $A_B = \frac{P \cdot a}{2}$

$A_B = 6 \cdot 6 \cdot 5,2 : 2 = 93,6 \text{ m}^2$
 $A_L = 6 \cdot l \cdot H$
 $A_L = 6 \cdot 6 \cdot 15 = 540 \text{ m}^2$
 $A_T = 2A_B + A_L$
 $A_T = 2 \cdot 93,6 + 540 = 727,2 \text{ m}^2$

4. Calcula el volumen de una pirámide cuadrangular en la que la arista de la base mide 5 m y cuya altura es de 9 m

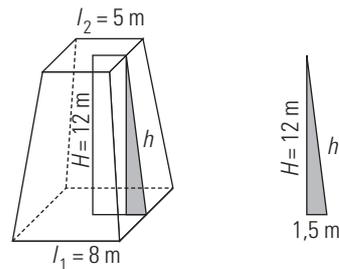


$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$
 $A = 5^2 \cdot 9 : 3 = 75 \text{ m}^2$

5. Calcula el área de un tronco de pirámide cuadrangular en el que la arista de la base mayor mide 8 m; la de la base menor, 5 m; y la altura, 12 m

$A_{B1} = l_1^2$
 $A_{B1} = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$
 $A_{B2} = l_2^2$
 $A_{B2} = 5^2 = 25 \text{ cm}^2$

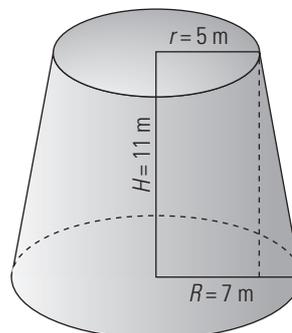
Tenemos que hallar la apotema del tronco de pirámide aplicando el teorema de Pitágoras:



$h = \sqrt{12^2 + 1,5^2} = \sqrt{146,25} = 12,09 \text{ m}$

$A_L = 4 \cdot \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot h$
 $A_L = 4 \cdot (8 + 5) : 2 \cdot 12,09 = 314,34 \text{ m}^2$
 $A_T = A_{B1} + A_{B2} + A_L$
 $A_T = 64 + 25 + 314,34 = 404,34 \text{ m}^2$

6. Calcula el volumen de un tronco de cono en el que el radio de la base mayor mide 7 m; el de la base menor, 5 m; y la altura, 11 m



$$A_{B_1} = \pi R^2$$

$$A_{B_1} = \pi \cdot 7^2 = 153,94 \text{ m}^2$$

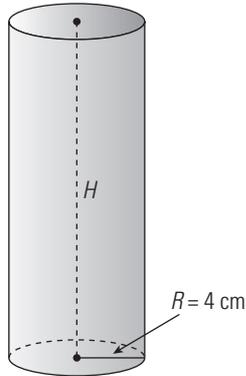
$$A_{B_2} = \pi r^2$$

$$A_{B_2} = \pi \cdot 5^2 = 78,54 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{1}{3} (A_{B_1} + A_{B_2} + \sqrt{A_{B_1} \cdot A_{B_2}}) \cdot H$$

$$V = (153,94 + 78,54 + \sqrt{153,94 \cdot 78,54}) \cdot 11 : 3 = 1255,6 \text{ m}^3$$

7. Calcula la altura que ha de tener un bote de conservas de un litro, sabiendo que el diámetro de la base mide 8 cm



Área de la base:

$$A_B = \pi R^2$$

$$A_B = \pi \cdot 4^2 = 50,27 \text{ cm}^2$$

$$V = A_B \cdot H \Rightarrow H = \frac{V}{A_B}$$

$$H = 1000 : 50,27 = 19,89 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

8. Calcula el volumen de un helado con forma de cono, que llena el interior del cono y del que sobresale una semiesfera en la parte superior. El radio del cono mide 2,5 cm y la altura es de 15 cm

Volumen del cono:

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

$$V = \pi \cdot 2,5^2 \cdot 15 : 3 = 98,17 \text{ cm}^3$$

Volumen de la semiesfera:

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3} \pi R^3 : 2$$

$$V = 4\pi \cdot 2,5^3 : 3 : 2 = 32,72 \text{ cm}^3$$

Volumen del helado:

$$98,17 + 32,72 = 130,89 \text{ cm}^3$$

WINDOWS/LINUX **GEOGEBRA** 

PASO A PASO

66. Halla el área y el volumen de una pirámide cuadrangular en el que la arista de la base mide 5 m y la altura tiene 9 m

Resuelto en el libro del alumnado.

67. Halla el área y el volumen de un cilindro recto cuya base tiene 3 m de radio y su altura es de 7 m

Resuelto en el libro del alumnado.

68. Halla el área y el volumen de una pirámide cuadrangular cuya base tiene una arista de 6 m y cuya altura es de 10 m

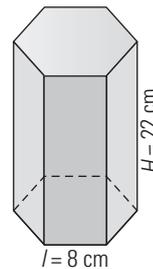
Resuelto en el libro del alumnado.

69. Halla el área y el volumen de un tronco de cono en el cual el radio de la base mayor mide 9 m; el radio de la base menor, 4 m; y la altura, 12 m

Resuelto en el libro del alumnado.

PRACTICA

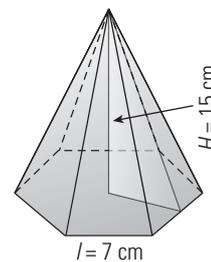
70. Halla el área y el volumen de un prisma hexagonal en el que la arista de la base mide 8 cm, y la altura, 22 cm



$$\text{Área total} = 1388,6 \text{ cm}^2$$

$$\text{Volumen} = 3658,1 \text{ cm}^3$$

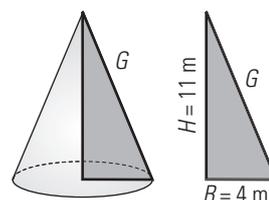
71. Halla el área y el volumen de una pirámide hexagonal en el que la arista de la base mide 7 cm, y la altura, 15 cm



$$\text{Área total} = 467,06 \text{ m}^2$$

$$\text{Volumen} = 636,53 \text{ m}^3$$

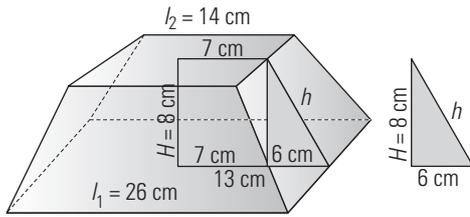
72. Halla el área y el volumen de un cono recto sabiendo que el radio de la base mide 4 m y la altura es de 11 m



$$\text{Área total} = 197,3 \text{ m}^2$$

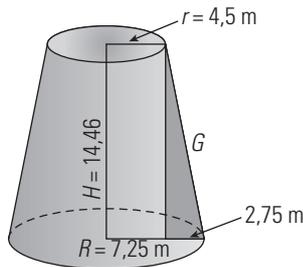
$$\text{Volumen} = 184,31 \text{ m}^3$$

73. Halla el área y el volumen de un tronco de pirámide cuadrada, en la que la arista de la base mayor mide 26 cm; la arista de la base menor, 14 cm; y la altura, 8 cm



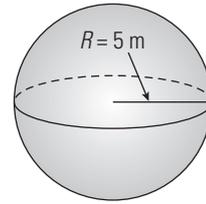
Área total = 772,09 m²
 Volumen = 1 596,6 m³

74. Halla el área y el volumen de un tronco de cono en el que el radio de la base mayor mide 7,25 m; el de la base menor, 4,5 m; y la altura 14,46 m



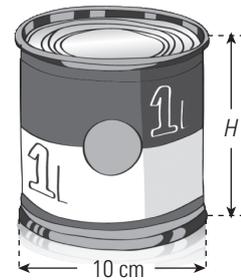
Área total = 1 672 cm²
 Volumen = 3 296 cm³

75. Halla el área y el volumen de una esfera cuyo radio mide 5 m



Área total = 197,3 m²
 Volumen = 184,31 m³

76. Supongamos que un bote de conservas es totalmente cilíndrico y que el diámetro de la base mide 10 cm. Si tiene una capacidad de 1 L, ¿cuánto medirá la altura?



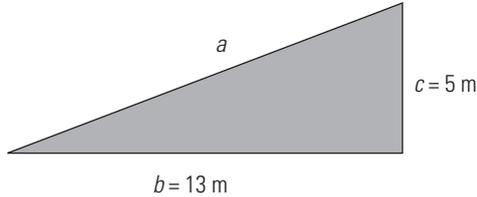
$D = 10 \text{ cm}$
 $R = \frac{D}{2} = 5 \text{ cm}$
 $A_B = 78,54 \text{ cm}^2$
 $V = A_B \cdot H$
 $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 1 000 \text{ cm}^3$
 $1 000 = 78,54 \cdot H$
 $H = 1 000 : 78,54 = 12,73$
 $H = 12,73 \text{ cm}$

Evaluación de diagnóstico

BLOQUE IV: GEOMETRÍA

Resuelve los siguientes ejercicios:

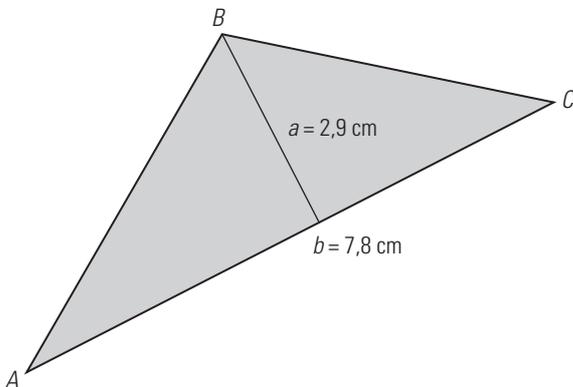
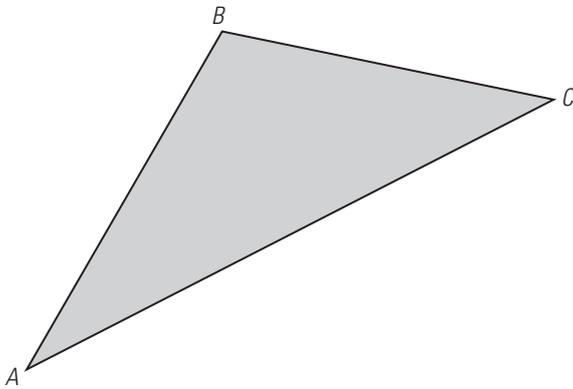
1. Una rampa tiene una longitud de 13 m y salva un desnivel de 5 m. ¿Qué longitud tiene la rampa?



$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 13^2 + 5^2 = 169 + 25 = 194$$

$$a = \sqrt{194} = 13,93 \text{ m}$$

2. Dibuja la altura del triángulo ABC desde el vértice B, toma medidas con la regla y calcula el área, dando el resultado en cm²



$$A = \frac{b \cdot a}{2} \Rightarrow A = \frac{7,8 \cdot 2,9}{2} = 11,3 \text{ cm}^2$$

3. Dos ciclistas, A y B, se cruzan en una rotonda de la que salen al mismo tiempo por dos carreteras perpendiculares entre sí. Ruedan los dos a velocidad constante: A va a 8 m/s y B va a 6 m/s

a) Expresa la velocidad del ciclista B en km/h

b) Expresa en kilómetros la distancia recorrida por el ciclista A, a partir de la rotonda, al cabo de 5 minutos.

Comprueba que la distancia que separa a los dos ciclistas en línea recta un minuto después de salir de la rotonda es de 600 metros.

$$a) 6 \text{ m/s} = 6 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} =$$

$$= 6 \cdot 3,6 \text{ km/h} = 21,6 \text{ km/h}$$

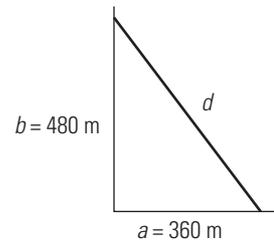
$$b) e = v \cdot t \Rightarrow e = 8 \cdot 5 \cdot 60 = 2400 \text{ m} = 2,4 \text{ km}$$

Espacio recorrido por A en un minuto:

$$e = v \cdot t \Rightarrow e = 8 \cdot 60 = 480 \text{ m}$$

Espacio recorrido por B en un minuto:

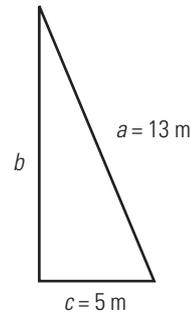
$$e = v \cdot t \Rightarrow e = 6 \cdot 60 = 360 \text{ m}$$



$$d^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 480^2 + 360^2 = 230400 + 129600 = 360000$$

$$d = \sqrt{360000} = 600 \text{ m}$$

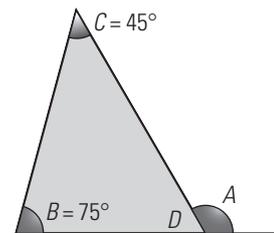
4. Apoyamos una escalera de 13 m de longitud sobre la pared, de forma que su base queda separada 5 m de la pared al nivel del suelo. ¿A qué altura llega la escalera?



$$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow b^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow b^2 + 25 = 169 \Rightarrow b^2 = 144$$

$$b = \sqrt{144} = 12 \text{ m}$$

5. Halla el ángulo A



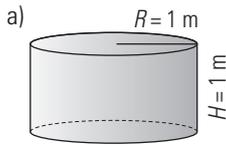
$$D = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$$

$$A = 180^\circ - D \Rightarrow A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

6. El depósito de gasoil de la casa de Irene es un cilindro de 1 m de altura y 2 m de diámetro. Irene ha llamado al suministrador de gasoil porque en el depósito solamente quedan 140 litros.

a) ¿Cuál es, en dm³, el volumen del depósito? Utiliza 3,14 como valor de π.

b) El precio del gasoil es de 0,80 € el litro. ¿Cuánto tiene que pagar Irene al suministrador del gasoil para que llene el depósito?

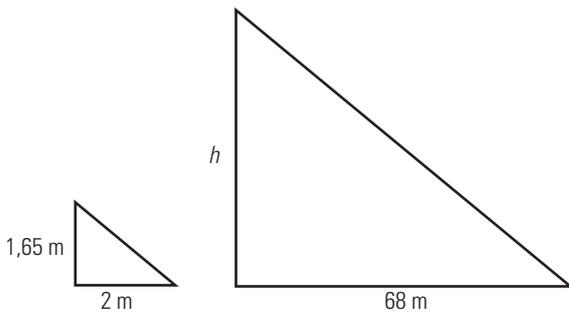


$$V = \pi \cdot R^2 \cdot H \Rightarrow V = 3,14 \cdot 1 \cdot 1 = 3,14 \text{ m}^3 = 3\,140 \text{ dm}^3$$

b) Hay que llenar: $3\,140 - 140 = 3\,000 \text{ L}$

Hay que pagar: $3\,000 \cdot 0,8 = 2\,400 \text{ €}$

7. Averigua la altura de una casa que proyecta una sombra de 68 m, sabiendo que en el mismo instante, una persona de 165 cm de alta, proyecta una sombra de 2 m

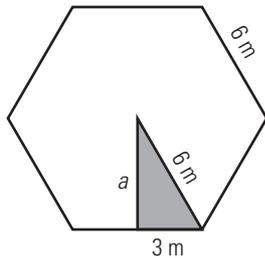


$$\frac{1,65}{2} = \frac{h}{68} \Rightarrow h = 56,1 \text{ m}$$

8. Calcula el área de una pirámide hexagonal regular en la que la arista de la base mide 6 cm y la altura, 8 cm

Área total: $A_T = A_B + A_L$

Hay que calcular la apotema de la base aplicando el teorema de Pitágoras:

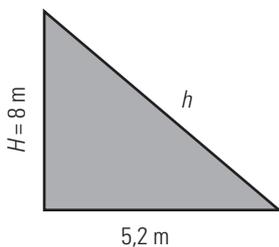


$$a = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 5,20 \text{ m}$$

$$A_B = \frac{P \cdot a}{2} \Rightarrow A_B = \frac{6 \cdot 6 \cdot 5,2}{2} = 93,6 \text{ m}^2$$

$$A_L = 6 \cdot \frac{b \cdot h}{2}$$

Hay que calcular la apotema de la pirámide aplicando el teorema de Pitágoras:

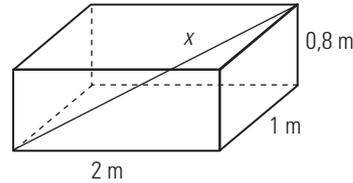


$$h = \sqrt{8^2 + 5,2^2} = \sqrt{91,04} = 9,54 \text{ m}$$

$$A_L = 6 \cdot \frac{6 \cdot 9,54}{2} = 171,72 \text{ m}^2$$

$$A_T = 93,6 + 171,72 = 265,32 \text{ m}^2$$

9. El maletero de un coche, de forma ortogonal, tiene unas dimensiones de 2 m de largo, 1 m de ancho y 80 cm de alto. ¿Podemos meter en el maletero una barra de madera de 260 cm de larga?



$$x = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0,8^2} = 2,37 \text{ m} = 237 \text{ cm} < 260 \text{ cm}$$

No se puede meter en el maletero.

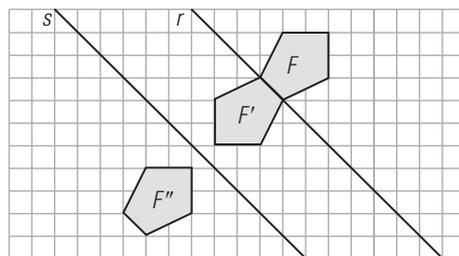
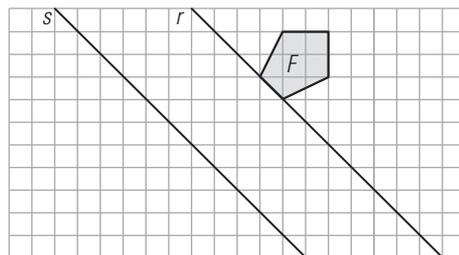
10. Halla el volumen de un cono de 4 cm de radio y 6 cm de altura.

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$$

$$A_B = \pi \cdot R^2 \Rightarrow A_B = 3,14 \cdot 4^2 = 50,24 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 50,24 \cdot 6 = 100,48 \text{ cm}^3$$

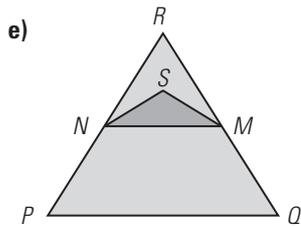
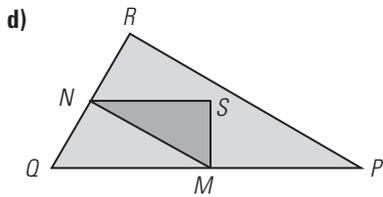
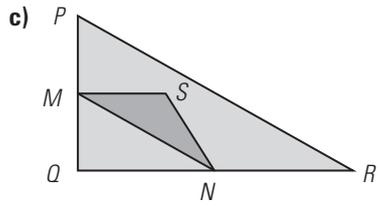
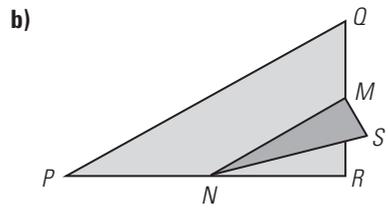
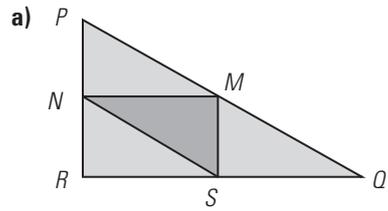
11. Dibuja la figura simétrica de F respecto de la recta r y después la simétrica de la obtenida respecto de la recta s. ¿A qué movimiento corresponde la composición de las dos simetrías?



La composición de las dos simetrías corresponde a una traslación de vector que tiene por módulo el doble de la distancia que hay entre las dos rectas, dirección perpendicular a las dos rectas y sentido que va de la primera recta a la segunda.

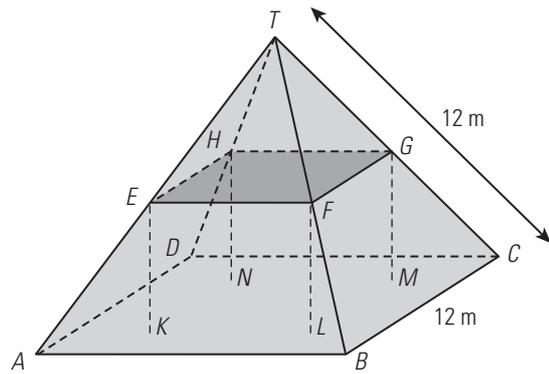
12. Señala la figura que se ajusta a la siguiente descripción:

El triángulo PQR es un triángulo rectángulo con el ángulo recto en R. El lado RQ es menor que el lado PR. M es el punto medio del lado PQ y N es el punto medio del lado QR. S es un punto del interior del triángulo. El segmento MN es mayor que el segmento MS.



La respuesta correcta es la d).

13. La siguiente figura muestra el modelo matemático del tejado en forma de pirámide de una casa.



La planta del ático, $ABCD$ en el modelo, es un cuadrado. Las vigas que sostienen el tejado son las aristas de un bloque (prisma rectangular) $EFGHKL MN$. E es el punto medio de AT , F es el punto medio de BT , G es el punto medio de CT y H es el punto medio de DT .

Todas las aristas de la pirámide tienen 12 m de longitud.

Pregunta 1.

Calcula el área de la planta del ático $ABCD$.

Pregunta 2.

Calcula la longitud de EF , una de las aristas horizontales del bloque.

1. $A = AB \cdot BC = 12^2 = 144 \text{ m}^2$

2. Como EF es paralelo a AB por el punto medio de AT , se tiene que los triángulos ABT y EFT son semejantes:

$$\frac{12}{12} = \frac{EF}{6} \Rightarrow EF = 6 \text{ m}$$

**SOLUCIONARIO BLOQUE V.
ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD**

13. Estadística

1. TABLAS DE FRECUENCIAS

PIENSA Y CALCULA

Se ha realizado un estudio en 30 personas. Observa la siguiente tabla y contesta:

Deporte	Fútbol	Baloncesto	Balonmano	Voleibol
N.º de personas	11	7	4	8

¿Sobre qué característica se investiga en el estudio? ¿Se puede contar o medir dicha característica?

Sobre el deporte que practican las 30 personas.
No. Es una característica cualitativa.

CARNÉ CALCULISTA

Desarrolla: $(7 + 5x)(7 - 5x) = 49 - 25x^2$

Factoriza: $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$

APLICA LA TEORÍA

1. Pon un ejemplo de cada tipo de carácter estadístico.

- a) Carácter cualitativo: el color del pelo.
- b) Carácter cuantitativo discreto: número de hijos de una familia.
- c) Carácter cuantitativo continuo: la estatura de unas personas.

2. El número de tornillos defectuosos que se han obtenido por término medio en 25 cajas envasadas en una fábrica ha sido: 3, 2, 5, 3, 3, 2, 1, 3, 2, 2, 4, 1, 1, 2, 2, 3, 5, 5, 5, 2, 4, 1, 1, 3, 2

- a) Clasifica el carácter estudiado.
- b) Haz una tabla de frecuencias absolutas y relativas.

- a) Carácter discreto.
- b) Tabla:

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
1	5	0,20	5	0,20
2	8	0,32	13	0,52
3	6	0,24	19	0,76
4	2	0,08	21	0,84
5	4	0,16	25	1,00
Suma	25	1,00		

3. Se ha preguntado a una muestra de personas sobre el funcionamiento de su ayuntamiento, obteniéndose los siguientes resultados:

Respuesta	Muy mal	Mal	Normal	Bien	Muy bien
N.º de personas	8	10	20	8	4

- a) Clasifica el carácter estudiado.
- b) Haz una tabla de frecuencias absolutas y relativas.

- a) Carácter cualitativo.

b) Tabla:

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
Muy mal	8	0,16	8	0,16
Mal	10	0,20	18	0,36
Normal	20	0,40	38	0,76
Bien	8	0,16	46	0,92
Muy bien	4	0,08	50	1,00
Suma	50	1,00		

4. Se ha realizado un estudio sobre el peso de un grupo de jóvenes, obteniéndose los siguientes resultados:

Peso (kg)	51,5-56,5	56,5-61,5	61,5-66,5
N.º jóvenes	6	8	10

Peso (kg)	66,5-71,5	71,5-76,5	76,5-81,5
N.º jóvenes	12	9	5

- a) Clasifica el carácter estudiado.
- b) Escribe la marca de clase y completa una tabla de frecuencias absolutas y relativas.

- a) Carácter cuantitativo continuo.
- b) Tabla:

Peso	x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
51,5 a 56,5	54	6	0,12	6	0,12
56,5 a 61,5	59	8	0,16	14	0,28
61,5 a 66,5	64	10	0,20	24	0,48
66,5 a 71,5	69	12	0,24	36	0,72
71,5 a 76,5	74	9	0,18	45	0,90
76,5 a 81,5	79	5	0,10	50	1,00
Suma		50	1,00		

2. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

PIENSA Y CALCULA

En la siguiente representación se recoge a los tres máximos goleadores de una liga juvenil. ¿Cuántos goles ha metido cada jugador?

Ramón: 

José: 

Fabio: 

 = 5 goles

 = 1 gol

Ramón: 23 goles José: 17 goles Fabio: 14 goles

CARNÉ CALCULISTA

Resuelve la ecuación:

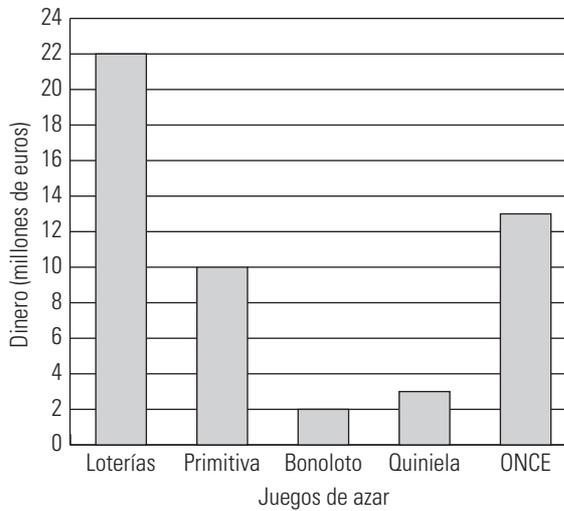
$$\frac{2x-1}{3} - \frac{x-3}{4} = \frac{x-5}{2}$$

$x = 35$

APLICA LA TEORÍA

5. En la tabla se recogen las cantidades, en miles de euros, recaudadas por una administración. Haz la representación gráfica más idónea e interpreta el resultado:

Loterías	Primitiva	Bonoloto	Quiniela	ONCE
22	10	2	3	13



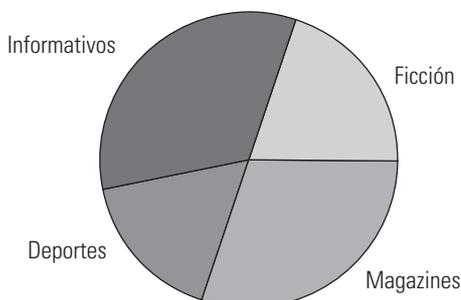
Casi la mitad del dinero se juega en loterías y casi la otra mitad entre la ONCE y la Primitiva.

6. En la tabla se recoge el número de programas que oferta una televisión semanalmente en distintas categorías. Haz la representación gráfica más idónea e interpreta el resultado:

Magazine	Deportes	Informativos	Ficción
27	15	30	18

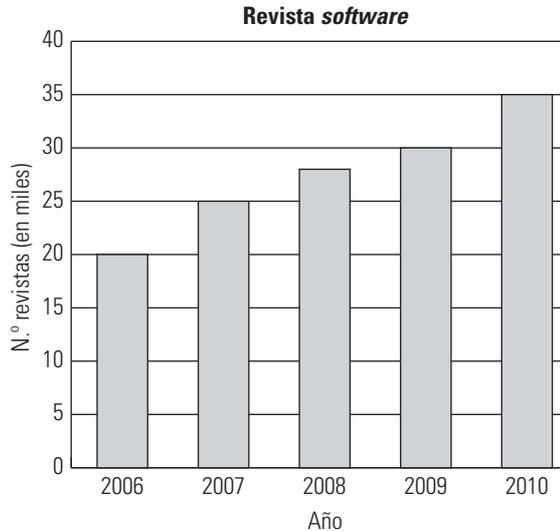
$360^\circ : 90 = 4^\circ$

Tipo de programas	N.º de programas	Amplitud del sector
Magazines	27	$27 \cdot 4^\circ = 108^\circ$
Deportes	15	$15 \cdot 4^\circ = 60^\circ$
Informativos	30	$30 \cdot 4^\circ = 120^\circ$
Ficción	18	$18 \cdot 4^\circ = 72^\circ$
Total	90	360°



7. Haz la representación gráfica más idónea del número total de revistas de software editadas por una empresa en 5 años e interpreta el resultado:

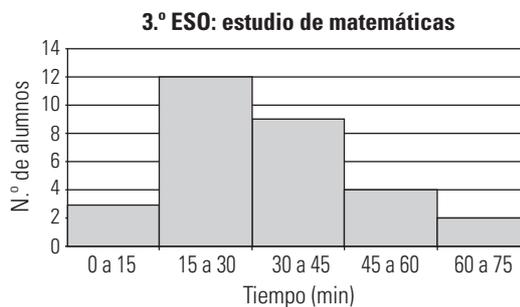
Año	2006	2007	2008	2009	2010
N.º revistas (miles)	20	25	28	30	35



El número de revistas editadas ha ido creciendo progresivamente, lo que significa que cada vez más usuarios están interesados por el tema de la revista.

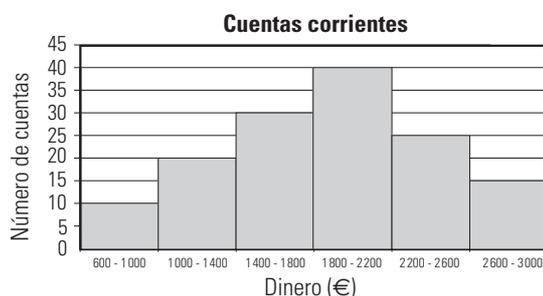
8. Haz la representación gráfica más idónea del tiempo que dedican a estudiar Matemáticas en su casa los alumnos de un grupo de 3.º de la ESO, e interpreta el resultado:

Tiempo (min)	0-15	15-30	30-45	45-60	60-75
N.º de alumnos	3	12	9	4	2



La mayoría de los alumnos dedican al estudio entre 15 y 45 minutos.

9. Construye una tabla de datos para el siguiente histograma e interpreta el resultado:



Saldo	N.º de cuentas
600 a 1 000	10
1 000 a 1 400	20
1 400 a 1 800	30
1 800 a 2 200	40
2 200 a 2 600	25
2 600 a 3 000	15

La mayoría de las cuentas corrientes tiene un saldo entre 1 400 € y 2 600 €

3. PARÁMETROS DE CENTRALIZACIÓN

PIENSA Y CALCULA

Paloma ha obtenido las siguientes calificaciones: 5, 7, 7 y 9

¿Qué calificación media ha obtenido? ¿Qué calificación ha sacado más veces?

La calificación media es un 7

La calificación que ha sacado más veces es un 7

CARNÉ CALCULISTA

Resuelve el sistema:

$$\left. \begin{aligned} 2x - 1 &= \frac{3y - 10}{4} \\ 8(x - 2) &= 5(2 - y) \end{aligned} \right\} x = \frac{3}{4}; y = 4$$

APLICA LA TEORÍA

10. El número de refrescos que se han consumido de una máquina expendedora durante los últimos 40 días ha sido:

5	7	8	12	8	5	12	7
8	15	15	7	8	12	8	5
7	12	8	12	15	8	7	8
12	5	7	8	5	12	15	7
7	8	15	7	12	8	5	8

Calcula la media aritmética, la moda y la mediana e interpreta los resultados.

x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
5	6	6	30
7	9	15	63
8	12	27	96
12	8	35	96
15	5	40	75
Total	40		360

Media: $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{360}{40} = 9$

Moda: 8

Mediana: 8

Los datos se distribuyen alrededor de 9 botes de refresco.

11. Se ha estudiado el tiempo, en horas, que tarda un antibiótico en hacer efecto sobre un tipo de bacteria, obteniéndose los siguientes resultados:

Tiempo (h)	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28	28-32
n_i	4	6	12	6	5	3	2

Calcula la moda, la media y la mediana para estos datos e interpreta los resultados.

Tiempo (h)	x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
4-8	6	4	4	24
8-12	10	6	10	60
12-16	14	12	22	168
16-20	18	6	28	108
20-24	22	5	33	110
24-28	26	3	36	78
28-32	30	2	38	60
Total		38		608

Media: $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{608}{38} = 16$

Moda: 14

Mediana: 14

Los datos se distribuyen alrededor de 16 horas.

12. Se ha estudiado el tipo de literatura que les gusta a los alumnos de una clase, obteniéndose los siguientes resultados:

Tipo de literatura	N.º de personas
Novela	10
Aventuras	12
Ciencia ficción	8
Poesía	4

a) Calcula la moda.

b) ¿Se pueden calcular la media y la mediana?

a) Moda: aventuras.

b) La media no se puede calcular porque el carácter estudiado es cualitativo. La mediana no se puede calcular porque el carácter no es cuantitativo ni cualitativo ordenable.

13. Se ha medido la cantidad de azúcar, en miligramos, de 40 productos de bollería, obteniéndose los siguientes resultados:

Azúcar (mg)	0,5-1,5	1,5-2,5	2,5-3,5	3,5-4,5	4,5-5,5
N.º de bollos	6	8	15	6	5

Calcula la moda, la media y la mediana e interpreta los resultados.

Azúcar (mg)	x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
0,5-1,5	1	6	6	6
1,5-2,5	2	8	14	16
2,5-3,5	3	15	29	45
3,5-4,5	4	6	35	24
4,5-5,5	5	5	40	25
Total		40		116

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{116}{40} = 2,9$$

Moda: 3

Mediana: 3

Los datos se distribuyen alrededor de 2,9 mg de azúcar.

4. PARÁMETROS DE DISPERSIÓN

PIENSA Y CALCULA

Alba ha obtenido en Matemáticas las notas: 7, 6, 7, 8 y 7, Óscar ha obtenido: 10, 2, 9, 10, 4. Calcula la media de ambas notas y di quién es más regular.

Alba tiene de media un 7

Óscar tiene de media un 7

Tienen la misma nota media, pero Alba es más regular porque sus notas oscilan menos.

CARNÉ CALCULISTA

Calcula la apotema de un hexágono regular, cuyo lado mide 8 m. Redondea el resultado a dos decimales.

$$a = \sqrt{8^2 - 4^2} = 6,93 \text{ m}$$

APLICA LA TEORÍA

14. Durante los últimos 26 días, el número de alumnos que ha faltado a clase ha sido:

N.º de alumnos	0	1	2	3	4	5
N.º de días	5	4	8	5	3	1

a) Calcula la desviación típica y el cociente de variación.

b) Interpreta los resultados.

a)

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
0	5	0	0	0
1	4	4	1	4
2	8	16	4	32
3	5	15	9	45
4	3	12	16	48
5	1	5	25	25
Total	26	52		154

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{52}{26} = 2$$

$$\text{Varianza: } V = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2 \Rightarrow V = \frac{154}{26} - 2^2 = 1,92$$

$$\sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = 1,39$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV = 0,69 = 69\% > 30\%$$

b) Las faltas de asistencia se distribuyen alrededor de dos faltas, pero con una dispersión muy grande.

15. Se ha medido la temperatura máxima en una ciudad durante los últimos días, obteniéndose los siguientes resultados:

Temperatura (°C)	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18
N.º de días	3	4	9	3	1

a) Calcula la desviación típica y el cociente de variación.

b) Interpreta los resultados.

a)

Temperatura (°C)	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
8-10	9	3	27	81	243
10-12	11	4	44	121	484
12-14	13	9	117	169	1521
14-16	15	3	45	225	675
16-18	17	1	17	289	289
Total		20	250		3212

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{250}{20} = 12,50$$

$$\text{Varianza: } V = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2$$

$$V = \frac{3212}{20} - 12,5^2 = 4,35$$

$$\sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = 2,09$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV = 0,17 = 17\% < 30\%$$

b) La temperatura se distribuye alrededor de 12,5 °C con una dispersión pequeña.

16. Las edades de los componentes de una asociación deportiva son las siguientes:

Edad (años)	Componentes
15-19	5
19-23	6
23-27	10
27-31	5
31-35	2

Calcula la desviación típica y el cociente de variación e interpreta los resultados.

Edad (años)	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
15-19	17	5	85	289	1 445
19-23	21	6	126	441	2 646
23-27	25	10	250	625	6 250
27-31	29	5	145	841	4 205
31-35	33	2	66	1 089	2 178
Total		28	672		16 724

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{672}{28} = 24$$

$$\text{Varianza: } V = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2$$

$$V = \frac{16 724}{28} - 24^2 = 21,29$$

$$\sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = 4,61$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV = 0,19 = 19\% < 30\%$$

Las edades se distribuyen alrededor de los 24 años con una disposición pequeña.

17. Durante los últimos 10 años, la cotización en bolsa de dos empresas, A y B, ha sido la siguiente:

Empresa A	4,0	4,2	4,0	4,1	4,0	3,9	4,2	4,0	4,0	4,1
Empresa B	7,0	7,2	7,0	6,5	7,5	7,0	7,5	6,5	7,2	7,0

a) Calcula la desviación típica y el cociente de variación.

b) Analiza en qué empresa puede ser más arriesgado invertir.

a) Empresa A:

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
3,9	1	3,9	15,21	15,21
4,0	5	20,0	16,00	80,00
4,1	2	8,2	16,81	33,62
4,2	2	8,2	17,64	35,28
Total	10	40,5		164,11

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{40,5}{10} = 4,05$$

$$\text{Varianza: } V = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2$$

$$V = \frac{164,11}{10} - 4,05^2 = 0,009$$

$$\sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = 0,09$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV = 0,023 = 2,3\% < 30\%$$

b) Empresa B:

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
6,5	2	13,0	42,25	84,50
7,0	4	28,0	49,00	196,00
7,2	2	14,4	51,84	103,68
7,5	2	15,0	56,25	112,50
Total	10	70,4		496,68

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{70,4}{10} = 7,04$$

$$\text{Varianza: } V = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2 \Rightarrow V = \frac{496,68}{10} - 7,04^2 = 0,11$$

$$\sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = 0,33$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV = 0,046 = 4,6\% < 30\%$$

En la empresa B hay una dispersión que es aproximadamente el doble que en la empresa A, pero los dos valores tienen una dispersión pequeña.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. TABLAS DE FRECUENCIAS

18. Clasifica los siguientes caracteres en cualitativos, cuantitativos discretos o cuantitativos continuos:

- a) El color de pelo.
- b) La estatura de un grupo de personas.
- c) El deporte preferido.
- d) El número de libros leídos.

- a) Cualitativo.
- b) Cuantitativo continuo.
- c) Cualitativo.
- d) Cuantitativo discreto.

19. El número de horas al día, por término medio, que unos jóvenes dedican a la lectura, es:

Tiempo (h)	0-0,5	0,5-1	1-1,5	1,5-2	2-2,5
N.º de alumnos	4	8	12	10	6

- a) Clasifica el carácter estudiado.
- b) Haz una tabla con las frecuencias acumuladas y relativas.

- a) Cuantitativo continuo.
- b) Tabla:

Tiempo (h)	x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
0-0,5	0,25	4	0,10	4	0,10
0,5-1	0,75	8	0,20	12	0,30
1-1,5	1,25	12	0,30	24	0,60
1,5-2	1,75	10	0,25	34	0,85
2-2,5	2,25	6	0,15	40	1,00
Total		40	1,00		

20. Se ha realizado un estudio sobre el número de veces que va al cine un grupo de jóvenes, obteniéndose los siguientes resultados:

3	2	1	3	2	4	1	4	3	2
1	5	3	6	3	5	3	2	5	1
3	1	2	1	4	2	6	4	2	3
3	2	4	3	1	5	2	1	3	2
2	3	2	5	3	1	3	4	1	3

- a) Clasifica el carácter estudiado.
- b) Haz una tabla de frecuencias absolutas y relativas.

- a) Cuantitativo discreto.
- b) Tabla:

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
1	10	0,20	10	0,20
2	12	0,24	22	0,44
3	15	0,30	37	0,74
4	6	0,12	43	0,86
5	5	0,10	48	0,96
6	2	0,04	50	1,00
Total	50	1,00		

21. Se ha preguntado a una muestra de personas por su grado de satisfacción sobre los servicios públicos, obteniéndose los siguientes resultados:

Respuesta	N.º de personas
Muy insatisfecho	15
Insatisfecho	25
Normal	28
Satisfecho	20
Muy satisfecho	12

- a) Clasifica el carácter estudiado.
 b) Haz una tabla de frecuencias absolutas y relativas.

- a) Carácter cualitativo.
 b) Tabla:

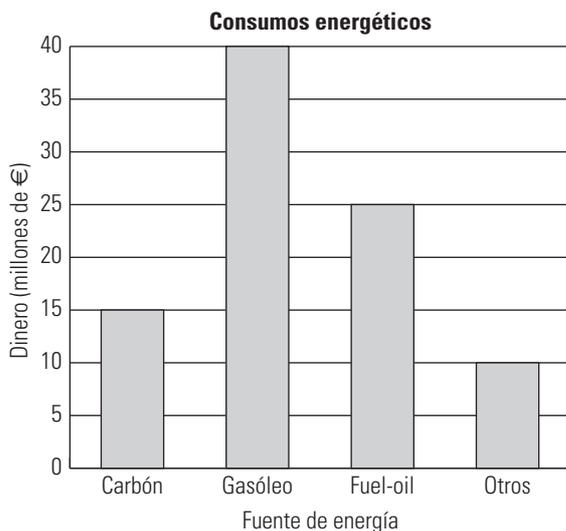
x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
Muy insatisfecho	15	0,15	15	0,15
Insatisfecho	25	0,25	40	0,40
Normal	28	0,28	68	0,68
Satisfecho	20	0,20	88	0,88
Muy satisfecho	12	0,12	100	1,00
Total	100	1,00		

2. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

22. En la siguiente tabla se recogen las cantidades de dinero (en millones de euros) gastadas en una comunidad autónoma en el último año:

Producto consumido	Dinero
Carbón	15
Gasóleo	40
Fuel-oil	25
Otros	10

Haz la representación gráfica más idónea e interpreta el resultado.



Casi la mitad de todo el dinero se dedica al consumo de gasóleo.

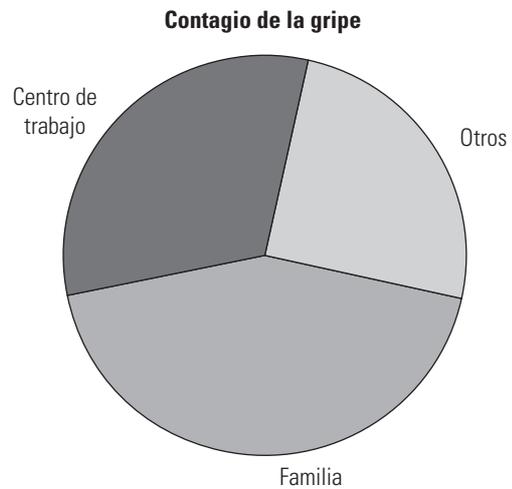
23. Se ha realizado un estudio relativo a los lugares y a la frecuencia con que se contagia la gripe entre las personas. Se han obtenido los siguientes resultados:

Lugar de contagio	N.º de personas
Familia	26
Centro de trabajo	19
Otros	15

Haz la representación gráfica más idónea e interpreta el resultado.

$360^\circ : 60 = 6^\circ$

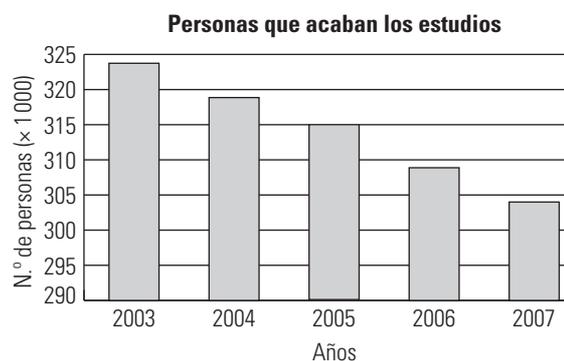
Lugar de contagio	N.º de personas	Amplitud del sector
Familia	26	$26 \cdot 6^\circ = 156^\circ$
Centro de trabajo	19	$19 \cdot 6^\circ = 114^\circ$
Otros	15	$15 \cdot 6^\circ = 90^\circ$
Total	60	360°



El contagio proviene generalmente del entorno familiar y del trabajo que es donde se está la mayoría del tiempo.

24. Haz la representación gráfica más idónea para el número de alumnos que ha terminado sus estudios de ESO en España durante los años siguientes, e interpreta el resultado:

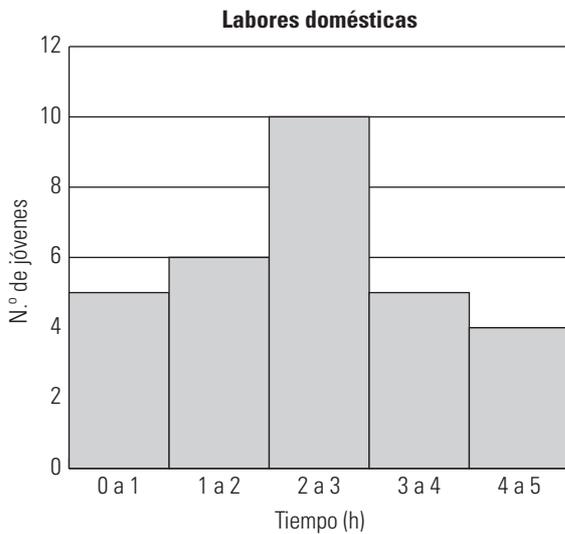
Año	2003	2004	2005	2006	2007
N.º de alumnos (en miles)	323	319	315	309	304



El número de personas que acaba los estudios disminuye progresivamente, lo que resulta lógico porque la población ha ido descendiendo según los años de implantación de las reformas educativas. Lo que no se puede concluir es si la proporción de personas que acaba sus estudios disminuye o no.

25. Haz la representación gráfica más idónea para el tiempo semanal que emplean unos jóvenes en ayudar en las labores domésticas en su casa:

Tiempo (h)	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5
N.º de jóvenes	5	6	10	5	4



3. PARÁMETROS DE CENTRALIZACIÓN

26. En una muestra de familias se ha estudiado el número de hijos que tienen, obteniéndose el siguiente resultado:

N.º de hijos	0	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	15	35	20	15	7	5	3

Calcula la moda, la media y la mediana para estos datos, e interpreta el resultado.

x_i	n_i	N_i	$x_i^2 \cdot n_i$
0	15	15	0
1	35	50	35
2	20	70	40
3	15	85	45
4	7	92	28
5	5	97	25
6	3	100	18
Total	100		191

Media: $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{191}{100} = 1,91$

Moda: un hijo.

Mediana: $100/2 = 50$

La mediana es $(1 + 2)/2 = 1,5$

El número de hijos se distribuye alrededor de 1,91 hijos.

27. El número de discos que una tienda ha vendido de la banda sonora de una película ha sido el siguiente:

N.º de discos	2	3	4	5	6	10
N.º de días	4	5	12	3	2	1

Calcula la moda, la media y la mediana para estos datos.

x_i	n_i	N_i	$x_i^2 \cdot n_i$
2	4	4	8
3	5	9	15
4	12	21	48
5	3	24	15
6	2	26	12
10	1	27	10
Total	27		108

Media: $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{108}{27} = 4$

Moda: 4

Mediana: 4

Los datos se distribuyen alrededor de 4 discos.

28. Se ha estudiado el deporte preferido de los alumnos de una clase, obteniéndose los siguientes resultados:

Deporte	N.º de alumnos
Fútbol	12
Baloncesto	6
Balonmano	5
Voleibol	2
Atletismo	2
Natación	3

a) Calcula la moda.

b) ¿Se pueden calcular la media y la mediana?

c) Interpreta los resultados obtenidos.

a) Moda: fútbol.

b) La media no se puede calcular porque el carácter estudiado es cualitativo. La mediana tampoco se puede calcular porque el carácter es cualitativo, pero no es ordenable.

c) El deporte más practicado es el fútbol.

4. PARÁMETROS DE DISPERSIÓN

29. La talla de los nacidos en una clínica en un determinado día se ha recogido en esta tabla:

Logitud (cm)	45-47	47-49	49-51	51-53	53-55
N.º de niños	2	6	4	2	1

Calcula la desviación típica y el coeficiente de variación e interpreta los resultados.

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
46	2	92	2 116	4 232
48	6	288	2 304	13 824
50	4	200	2 500	10 000
52	2	104	2 704	5 408
54	1	54	2 916	2 916
Total	15	738		36 380

Media: $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{738}{15} = 49,2$

Varianza: $V = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2$

$V = \frac{36\,380}{15} - 49,2^2 = 4,69$

$\sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = 2,17$

$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV = 0,04 = 4\% < 30\%$

Los datos se distribuyen alrededor de 49,2 cm con una dispersión muy pequeña.

30. Las semanas en cartel que han estado distintas películas en un determinado cine han sido: 3, 1, 4, 3, 2, 5, 2, 11, 5, 2. Calcula la desviación típica y el cociente de variación.

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
1	1	1	1	1
2	3	6	4	12
3	2	6	9	18
4	1	4	16	16
5	2	10	25	50
11	1	11	121	121
Total	10	38		218

Media: $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{38}{10} = 3,8$

Varianza: $V = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2$

$V = \frac{218}{10} - 3,8^2 = 7,36$

$\sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = 2,71$

$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV = 0,71 = 71\% > 30\%$

Hay mucha dispersión de datos.

31. El peso de 25 deportistas se recoge en la tabla:

Masa (kg)	63-67	67-71	71-75	75-79	79-83
N.º de deportistas	1	12	5	4	2

Calcula la desviación típica y el cociente de variación e interpreta los resultados.

Masa (kg)	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
63-67	65	1	65	4 225	4 225
67-71	69	12	828	4 761	57 132
71-75	73	5	365	5 329	26 645
75-79	77	4	308	5 929	23 716
79-83	81	2	162	6 561	13 122
Total		24	1 728		124 840

Media: $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1\,728}{24} = 72$

Varianza: $V = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2$

$V = \frac{124\,840}{24} - 72^2 = 17,67$

$\sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = 4,20$

$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV = 0,06 = 6\% < 30\%$

Los pesos se distribuyen alrededor de 72 kg con una dispersión muy pequeña.

32. Dos atletas que corren la prueba de 100 m han hecho los siguientes registros:

Atleta A	10,1	10,1	10,1	10,1	10,2
Atleta B	10,4	10,3	9,79	9,79	10,3

a) Calcula la desviación típica y el cociente de variación.

b) ¿Qué atleta elegirías si deseas arriesgarte para obtener la mejor marca?

a)

Atleta A (x_i)	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
10,1	4	40,4	102,01	408,04
10,2	1	10,2	104,04	104,04
Total	5	50,6		512,08

Media: $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{50,6}{5} = 10,12$

Varianza: $V = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2$

$V = \frac{512,08}{5} - 10,12^2 = 0,0016$

$\sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = 0,04$

$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV = 0,004 = 0,4\% < 30\%$

Atleta B (x_i)	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
9,79	2	19,58	95,84	191,69
10,3	2	20,60	106,09	212,18
10,4	1	10,40	108,16	108,16
Total	5	50,58		512,03

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{50,58}{5} = 10,116$$

$$\text{Varianza: } V = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2$$

$$V = \frac{512,03}{5} - 10,116^2 = 0,072$$

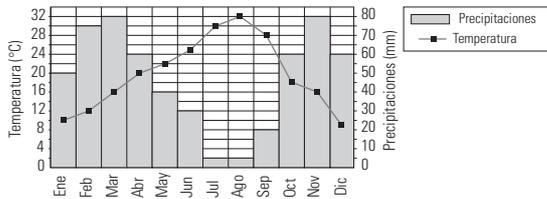
$$\sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = 0,268$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV = 0,026 = 2,6\% < 30\%$$

b) El atleta A es más constante y el atleta B tiene mayor dispersión, pero es el que puede obtener mejor marca.

PARA AMPLIAR

33. Un climograma es un gráfico en el que se registran las temperaturas y las lluvias durante un año. Analiza el siguiente y haz una tabla de datos donde se recojan las temperaturas y las precipitaciones.



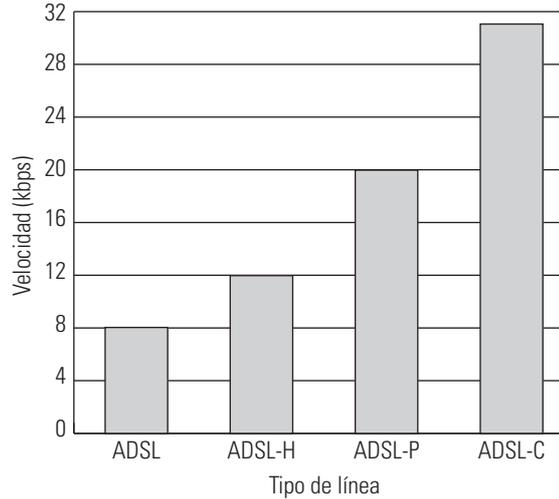
En verano las precipitaciones disminuyen y las temperaturas son muy altas, al revés que en invierno.

Mes	Precipitaciones (mm)	Temperatura (°C)
Enero	50	10
Febrero	75	12
Marzo	80	16
Abril	60	20
Mayo	40	22
Junio	30	25
Julio	5	30
Agosto	5	32
Septiembre	20	28
Octubre	60	18
Noviembre	80	16
Diciembre	60	8

34. En la siguiente tabla se recoge la velocidad, en Mbps, que permite el acceso a Internet según el tipo de línea. Haz la representación gráfica más idónea.

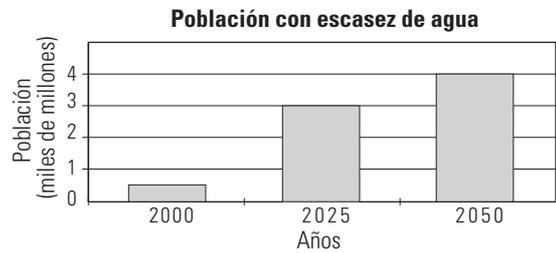
Línea	Velocidad (Mbps)
ADSL	8
ADSL - H	12
ADSL - P	20
ADSL - C	30

Velocidad de líneas telefónicas



PROBLEMAS

35. El siguiente gráfico recoge hasta el 2050 la población que tendrá escasez de agua. Haz una tabla de datos que recoja los resultados.



Población con escasez de agua	
Años	Población (miles de millones)
2000	0,50
2025	3,00
2050	4,00

36. El tiempo, en horas, que unos escolares dedican a hacer deporte se recoge en la tabla siguiente:

Tiempo (h)	N.º de escolares
0-2	5
2-4	8
4-6	4
6-8	3

Calcula la media, la desviación típica y el cociente de variación e interpreta los resultados.

Tiempo (h)	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
0-2	1	5	5	1	5
2-4	3	8	24	9	72
4-6	5	4	20	25	100
6-8	7	3	21	49	147
Total		20	70		324

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{70}{20} = 3,5$$

$$\text{Varianza: } V = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2$$

$$V = \frac{324}{20} - 3,5^2 = 3,95$$

$$\sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = 1,99$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV = 0,57 = 57\% > 30\%$$

El tiempo se distribuye alrededor de 3,5 h, pero con una dispersión muy grande.

37. La estatura, en centímetros, de un grupo de alumnos es:

Estatura (cm)	N.º de alumnos
140-150	1
150-160	6
160-170	10
170-180	4
180-190	2

Calcula la media, la desviación típica y el cociente de variación e interpreta los resultados.

Estatura (cm)	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
140-150	145	1	145	21 025	21 025
150-160	155	6	930	24 025	144 150
160-170	165	10	1 650	27 225	272 250
170-180	175	4	700	30 625	122 500
180-190	185	2	370	34 225	68 450
Total		23	3 795		628 375

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{3 795}{23} = 165$$

$$\text{Varianza: } V = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2$$

$$V = \frac{628 375}{23} - 165^2 = 95,65$$

$$\sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = 9,78$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV = 0,06 = 6\% < 30\%$$

La estatura se distribuye alrededor de 165 cm con una dispersión pequeña.

38. La distribución de vehículos detectados en un control de velocidad en carretera ha sido:

Velocidad (km/h)	N.º de vehículos
70-80	4
80-90	6
90-100	20
100-110	16
110-120	4

Calcula la media y la desviación típica e interpreta el resultado.

Velocidad (km/h)	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
70-80	75	4	300	5 625	22 500
80-90	85	6	510	7 225	43 350
90-100	95	20	1 900	9 025	180 500
100-110	105	16	1 680	11 025	176 400
110-120	115	4	460	13 225	52 900
Total		50	4 850		475 650

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{4 850}{50} = 97$$

$$\text{Varianza: } V = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2$$

$$V = \frac{475 650}{50} - 97^2 = 104$$

$$\sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = 10,2$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV = 0,11 = 11\% < 30\%$$

La velocidad se distribuye alrededor de 97 km/h con una dispersión pequeña.

39. Se necesita hacer un pedido de termómetros clínicos, por lo que antes se prueban nueve distintos midiendo a la vez cierta temperatura. Los resultados son los siguientes:

36,4; 36,2; 36,9; 37,4; 37; 36,7; 37,6; 37,1; 36,8

¿Con qué termómetro se deben quedar?

La temperatura media de los termómetros es: 36,9
Lo lógico sería quedarse con el termómetro que da 36,9 porque es el que menos oscilación da con respecto a la media.

PARA PROFUNDIZAR

40. Se han cortado unos trozos de cable cuyas longitudes se han recogido en la siguiente tabla:

Longitud (cm)	N.º de cables
1-3	4
3-5	10
5-7	5
7-9	4
9-11	1

Calcula la media, la desviación típica y el cociente de variación e interpreta los resultados.

Longitud (cm)	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
1-3	2	4	8	4	16
3-5	4	10	40	16	160
5-7	6	5	30	36	180
7-9	8	4	32	64	256
9-11	10	1	10	100	100
Total		24	120		712

Media: $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{120}{24} = 5$

Varianza: $V = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2$

$V = \frac{712}{24} - 5^2 = 4,67$

$\sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = 2,16$

$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV = 0,43 = 43\% > 30\%$

Las longitudes se distribuyen alrededor de 5 cm con una dispersión grande.

41. ¿Cómo varía la media y la desviación típica si a todos los datos se les suma un mismo número? Compruébalo con los siguientes datos:

x_i	2	5	6	4	2	3	5
$x_i + 3$	5	8	9	7	5	6	8

	x_i	$x_i + 3$
Media	3,86	6,86
σ	1,46	1,46

La media aumenta en el mismo número que se suma a los datos y la desviación típica no varía.

42. ¿Cómo varía la media y la desviación típica si todos los datos se multiplican por un mismo número? Compruébalo con los siguientes datos:

x_i	3	5	6	5	4	2	3
$2x_i$	6	10	12	10	8	4	6

	x_i	$x_i + 3$
Media	4	8
σ	1,3	2,6

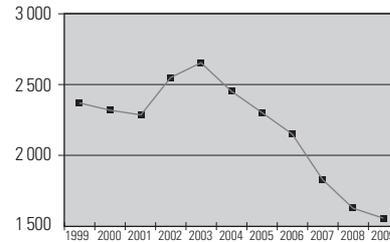
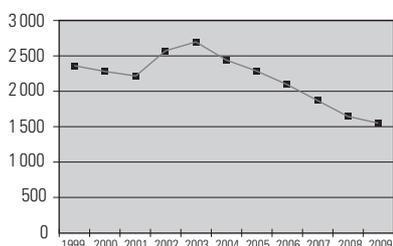
La media y la desviación típica quedan multiplicadas por el mismo número.

43. Calcula la nota media de Ernesto si ha sacado las calificaciones 8, 5, 6, 9, sabiendo que estas representan un 40%, 35%, 10% y un 15% de la nota respectivamente.

Nota media = $0,4 \cdot 8 + 0,35 \cdot 5 + 0,1 \cdot 6 + 0,15 \cdot 9 = 6,9$

APLICA TUS COMPETENCIAS

44. La estadística trata información y la resume en forma de gráfico en muchas ocasiones. Analiza la evolución del paro en España durante la siguiente serie:



Los dos gráficos recogen los mismos datos.

a) ¿Dan los dos gráficos la misma sensación de descenso del paro?

b) ¿Qué diferencias hay?

c) ¿Elegirían el Gobierno y la oposición el mismo gráfico?

- a) El 2.º da más sensación de descenso.
- b) El eje de ordenadas. El 1.º comienza en cero y el 2.º está cortado y comienza en 1500
- c) Dependiendo de lo que se quiera decir, se elegirá el 1.º o el 2.º. Si se quiere dar sensación de que el descenso es importante, se elegirá el 2.º. Parece lógico pensar que el gráfico 2.º es el que elegiría un Gobierno que quisiera decir que el paro ha descendido con rapidez.

COMPRUEBA LO QUE SABES

1. Define carácter estadístico cuantitativo y cualitativo. Pon un ejemplo de cada tipo.

Carácter estadístico cualitativo: es aquel que indica una cualidad. No se puede contar ni medir.

Carácter estadístico cuantitativo: es aquel que indica una cantidad. Se puede contar o medir. Se clasifica en:

- a) **Cuantitativo discreto:** sus valores son el resultado de un recuento. Solo puede tomar ciertos valores aislados.
- b) **Cuantitativo continuo:** sus valores son el resultado de una medida. Puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo.

Ejemplo:

		Caracteres	Valores
Cualitativo		El deporte practicado	Fútbol, natación...
	Discreto	El n.º de libros que lee al año	0, 1, 2, 3...
Cuantitativo	Continuo	La estatura	160 cm, 170 cm...

2. Ante la propuesta de un ayuntamiento de pasar un día sin coches, la opinión de los vecinos fue la que se recoge en la tabla:

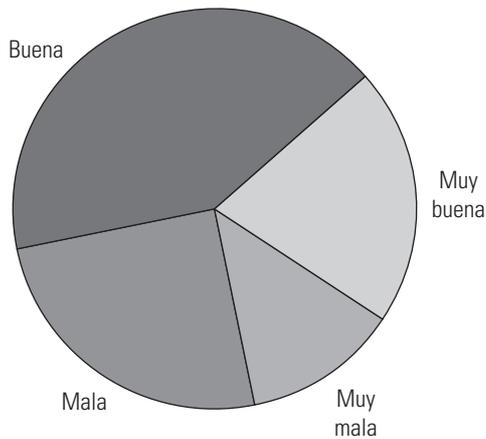
Opinión	N.º de vecinos
Muy mala	15
Mala	30
Buena	50
Muy buena	25

Haz la representación gráfica más idónea e interpreta el resultado.

$360^\circ : 120 = 3^\circ$

Opinión	N.º de vecinos	Amplitud del sector
Muy mala	15	$15 \cdot 3^\circ = 45^\circ$
Mala	30	$30 \cdot 3^\circ = 90^\circ$
Buena	50	$50 \cdot 3^\circ = 150^\circ$
Muy buena	25	$25 \cdot 3^\circ = 75^\circ$
Total	120	360°

Opinión de los vecinos



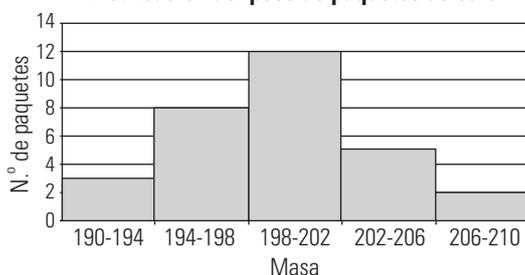
3. Se han pesado 30 paquetes de café, obteniéndose los resultados indicados en la tabla:

Masa (g)	N.º de paquetes
190-194	3
194-198	8
198-202	12
202-206	5
206-210	2

Haz la representación gráfica más idónea.

Masa (g)	x_i	n_i
190-194	192	3
194-198	196	8
198-202	200	12
202-206	204	5
206-210	208	2

Distribución del peso de paquetes de café



4. Se han cortado unos trozos de cable cuyas longitudes se han recogido en la tabla:

Longitud (cm)	N.º de cables
1-3	4
3-5	10
5-7	5
7-9	4
9-11	1

Calcula la media, la desviación típica y el cociente de variación e interpreta los resultados.

Longitud (cm)	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot n_i$
1-3	2	4	8	4	16
3-5	4	10	40	16	160
5-7	6	5	30	36	180
7-9	8	4	32	64	256
9-11	10	1	10	100	100
Total		24	120		712

Media: $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{120}{24} = 5$

Varianza: $V = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2$

$V = \frac{712}{24} - 5^2 = 4,67$

$\sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = 2,16$

$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV = 0,43 = 43\% > 30\%$

Las longitudes se distribuyen alrededor de 5 cm con una dispersión grande.

5. Se ha realizado un examen en dos clases, obteniéndose los resultados indicados en la tabla:

	Media	Desviación típica
Clase A	5	3
Clase B	5	1,5

Di en qué clase se han obtenido 8 sobresalientes y 8 suspensos y en cuál 2 sobresalientes y 1 suspenso.

En la clase A hay más dispersión, luego en esa clase se darán notas más altas y más bajas.

En la clase B hay menos dispersión y las notas serán más homogéneas.

Los 8 sobresalientes y los ocho suspensos se darán en la clase A y los dos sobresalientes y el suspenso en la clase B

WINDOWS EXCEL

WINDOWS/LINUX CALC

PASO A PASO

45. En la siguiente tabla se recogen los datos del deporte preferido por los alumnos de una clase:

	A	B
1	Deportes	
2	Datos cualitativos	
3	Valores	Frecuencias
4	x_i	n_i
5	Fútbol	11
6	Baloncesto	7
7	Balonmano	4
8	Voleibol	6
9	Atletismo	5
10	Total	33
11	Parámetros de centralización	
12	Moda	Fútbol

Obtén las medidas de centralización y de dispersión que tengan sentido, haz el diagrama de sectores correspondiente e interpreta los resultados obtenidos.

Resuelto en el libro del alumnado.

46. Para conocer el índice de natalidad de las familias de los estudiantes de un centro, se les ha preguntado a los alumnos de una clase por el número de hermanos que son, y se han obtenido los resultados siguientes:

	A	B	C	D	E
1	Índice de natalidad				
2	Datos cuantitativos discretos				
3	Valores	Frecuencias			
4	x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
5	1	8			
6	2	11			
7	3	5			
8	4	3			
9	5	1			
10	Total				
11	Parámetros de centralización				
12	Moda				
13	Mediana				
14	Media				
15	Parámetros de dispersión				
16	Recorrido				
17	Varianza				
18	Desviación típica				
19	Coefficiente de variación				

Obtén las medidas de centralización y de dispersión que tengan sentido, e interpreta los resultados obtenidos. Haz un gráfico de barras.

Resuelto en el libro del alumnado.

47. Para conocer el peso medio de los integrantes de un club juvenil, se ha tomado una muestra y se han obtenido los siguientes resultados.

	A	B	C	D	E
1	Peso de jóvenes				
2	Datos cuantitativos continuos				
3	Marca de clase	Frecuencias			
4	x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
5	55	3			
6	60	4			
7	65	10			
8	70	12			
9	75	7			
10	80	4			
11	Total				
12	Parámetros de centralización				
13	Moda				
14	Mediana				
15	Media				
16	Parámetros de dispersión				
17	Recorrido				
18	Varianza				
19	Desviación típica				
20	Coefficiente de variación				

Obtén las medidas de centralización y de dispersión que tengan sentido, haz el histograma correspondiente e interpreta los resultados obtenidos.

Resuelto en el libro del alumnado.

PRACTICA

Obtén las medidas de centralización y de dispersión que tengan sentido, haz la representación gráfica más idónea e interpreta los resultados obtenidos de los siguientes datos:

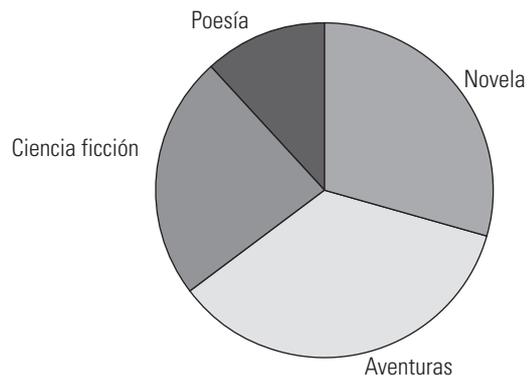
48. Para conocer el gusto por la lectura de los alumnos de un centro se ha hecho una encuesta, obteniendo los siguientes resultados:

Tipo de literatura	N.º de alumnos
x_i	n_i
Novela	10
Aventuras	12
Ciencia ficción	8
Poesía	4

Lectura	
Datos cualitativos	
x_i	n_i
Novela	10
Aventuras	12
Ciencia ficción	8
Poesía	4
Total	34
Parámetros de centralización	
Moda	Aventuras

Como los datos son cualitativos no ordenables, solo tiene sentido hallar la moda, que es: aventuras.

Distribución del gusto por la lectura



Interpretación:

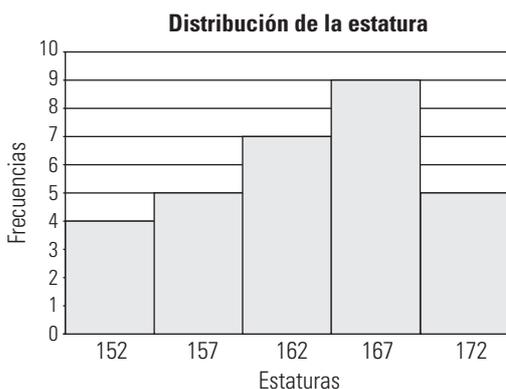
Los libros más leídos son los de aventuras.

49. Para conocer la estatura de los alumnos de un centro se hace una encuesta y se mide a sus integrantes, obteniéndose los siguientes resultados:

Estatura (cm)	Marca de clase	Frecuencia
Intervalo	x_i	n_i
149,5-154,5	152	4
154,5-159,5	157	5
159,5-164,5	162	7
164,5-169,5	167	9
169,5-174,5	172	5

Estatura				
Datos cuantitativos continuos				
Marca de clase	Frecuencia			
x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
152	4	4	608	92 416
157	5	9	785	123 245
162	7	16	1 134	183 708
167	9	25	1 503	251 001
172	5	30	860	147 920
Total	30		4 890	798 290

Parámetros de centralización	
Media	163,00
Moda	167,00
Mediana	162,00
Parámetros de dispersión	
Recorrido	20,00
Varianza	40,67
Desviación típica	6,38
Coeficiente de variación	0,04



Interpretación:
Los datos se distribuyen alrededor de 163 cm con una dispersión pequeña:

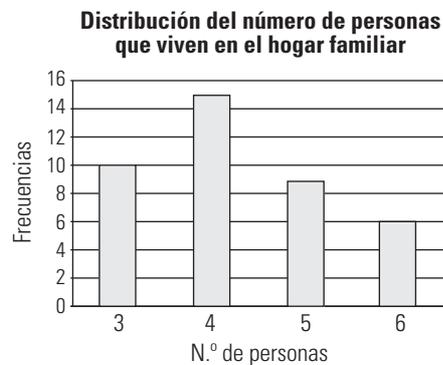
$$0,04 = 4\% < 30\%$$

50. Para conocer el número de personas que viven en el hogar familiar en una ciudad se ha hecho una encuesta y se han obtenido los siguientes resultados:

Valores	Frecuencias
x_i	n_i
3	10
4	15
5	9
6	6

N.º de personas en el hogar				
Datos cuantitativos discretos				
x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
3	10	10	30	90
4	15	25	60	240
5	9	34	45	225
6	6	40	36	216
Total	40		171	771

Parámetros de centralización	
Media	4,28
Moda	4,00
Mediana	4,00
Parámetros de dispersión	
Recorrido	3,00
Varianza	1,00
Desviación típica	1,00
Coeficiente de variación	0,23



Interpretación:

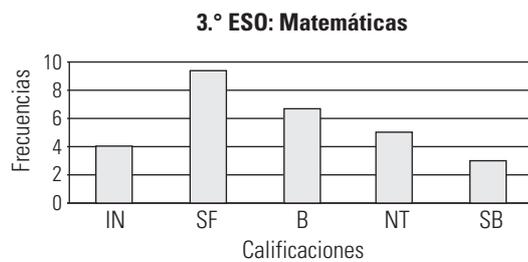
Los datos se distribuyen alrededor de 4,28 personas con una dispersión no muy grande:

$$0,23 = 23\% < 30\%$$

51. Las calificaciones del último examen de Matemáticas de una clase de 3.º de ESO se recogen en la tabla siguiente:

Calificaciones	N.º de alumnos
x_i	n_i
IN	4
SF	9
B	7
NT	5
SB	3

Como los datos son cualitativos, solo tiene sentido hallar la moda que es SF.



Interpretación:

Se observa que hay pocos insuficientes y pocos sobresalientes. La mayoría de las calificaciones está entre el SF y el B.

14. Probabilidad

1. EXPERIMENTOS ALEATORIOS

PIENSA Y CALCULA

Ordena las siguientes expresiones de menos probable a más probable: **casi seguro, poco probable, seguro, casi imposible, probable, imposible, bastante probable.**

Imposible, casi imposible, poco probable, probable, bastante probable, casi seguro, seguro.

CARNÉ CALCULISTA

Desarrolla: $x(x + 2)(x - 2) = x^3 - 4x$

Factoriza: $9x^3 + 30x^2 + 25x = x(3x + 5)^2$

APLICA LA TEORÍA

1. Clasifica los siguientes experimentos como deterministas o de azar:

- a) Lanzar una moneda al aire.
- b) Pinchar un globo.
- c) Frenar un coche.
- d) Sacar una carta de una baraja.

Determinista: b) y c).

De azar: a) y d).

2. Escribe dos experimentos deterministas.

- a) Pesar un melón.
- b) Medir la longitud de una mesa.

3. Escribe dos experimentos de azar.

- a) Sacar una carta de una baraja.
- b) Jugar a la lotería.

4. En el experimento de lanzar una moneda al aire, halla:

- a) El suceso seguro.
- b) Un suceso imposible.

a) $E = \{C, X\}$

b) $\emptyset = \{\text{Que se obtengan copas}\}$

5. En el experimento de lanzar al aire un dado en forma de dodecaedro con las caras numeradas del 1 al 12, halla:

- a) El espacio muestral.
- b) Los sucesos elementales.
- c) El suceso A formado por los múltiplos de 3
- d) El suceso contrario \bar{A}
- e) El suceso B formado por los números pares.
- f) El suceso $A \cup B$
- g) El suceso $A \cap B$. ¿Los sucesos A y B son compatibles o incompatibles?

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

b) $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{9\}, \{10\}, \{11\}$ y $\{12\}$

c) $A = \{3, 6, 9, 12\}$

d) $\bar{A} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$

e) $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

f) $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$

g) $A \cap B = \{6, 12\} \neq \emptyset \Rightarrow A$ y B compatibles.

2. REGLA DE LAPLACE

PIENSA Y CALCULA

a) Si lanzamos una moneda al aire, ¿qué resultado es más probable, cara o cruz?

b) Si lanzamos una chincheta al aire, ¿qué resultado es más probable, que quede con la punta hacia arriba o con la punta hacia abajo?

a) Son igualmente probables.

b) Es más probable que la punta quede hacia arriba.

CARNÉ CALCULISTA

Resuelve la ecuación:

$$\frac{(x + 2)(x - 2)}{3} = \frac{x(x - 3)}{2}$$

$$x_1 = 1; x_2 = 8$$

APLICA LA TEORÍA

6. Lanzamos al aire una chincheta 25 veces. De ellas, 10 veces queda con la punta hacia abajo y 15 veces hacia arriba. Halla:

- a) La frecuencia absoluta de que quede con la punta hacia arriba.
- b) La frecuencia relativa de que quede con la punta hacia arriba.

a) $n = 15$

b) $f = 15/25 = 3/5 = 0,6$

7. Aplicando la regla de Laplace, calcula la probabilidad de obtener un número impar al lanzar un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{1, 3, 5\}$$

$$P(A) = 3/6 = 1/2 = 0,5$$

8. Si en un experimento $P(A) = 1/3$, calcula $P(\bar{A})$

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

9. Si los sucesos A y B son incompatibles con:

$$P(A) = 1/2 \text{ y } P(B) = 1/3$$

calcula $P(A \cup B)$

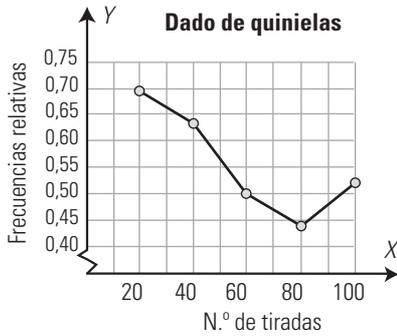
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

10. Copia en tu cuaderno y calcula las frecuencias relativas de obtener un 1 en el lanzamiento de un dado de quinielas (tiene tres 1, dos X y un 2) y dibuja el gráfico lineal correspondiente.

N	20	40	60	80	100
n	14	25	30	35	52
f					

¿Qué probabilidad de que salga un 1 deduces que tiene?

N	20	40	60	80	100
n	14	25	30	35	52
f	0,7	0,63	0,5	0,44	0,52



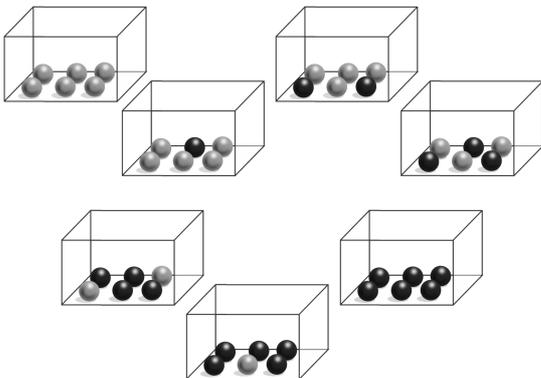
$P(1) = 1/2$

11. Si los sucesos **A** y **B** son compatibles con:
 $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/2$ y $P(A \cap B) = 1/3$
 calcula $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

3. EXPERIMENTOS SIMPLES
PIENSA Y CALCULA

Calcula la probabilidad de obtener una bola roja de cada una de las siguientes urnas, y asocia cada una de estas probabilidades con las siguientes expresiones: casi seguro, poco probable, seguro, casi imposible, probable, imposible, bastante probable.



- $P(R) = 0$, imposible.
- $P(R) = 1/6$, casi imposible.
- $P(R) = 1/3$, poco probable.
- $P(R) = 1/2$, probable.
- $P(R) = 2/3$, bastante probable.
- $P(R) = 5/6$, casi seguro.
- $P(R) = 1$, seguro.

CARNÉ CALCULISTA

Resuelve el sistema:

$$\left. \begin{aligned} y &= 2x + 1 \\ \frac{x + 5}{3} &= \frac{y}{2} - \frac{5}{6} \end{aligned} \right\} x = 3; y = 7$$

APLICA LA TEORÍA

12. Calcula la probabilidad de obtener cruz, **X**, al lanzar al aire una moneda de un euro.

$E = \{C, X\}$
 $A = \{X\}$
 $P(A) = 1/2 = 0,5$

13. Calcula la probabilidad de obtener una bola de color azul al extraer una bola de una urna que tiene 3 bolas rojas, 5 azules y 2 verdes.

$E = \{3R, 5A, 2V\}$
 $A = \{5A\}$
 $P(A) = 5/10 = 1/2 = 0,5$

14. Calcula la probabilidad de obtener un número par al lanzar al aire un dado de forma cúbica y con las caras numeradas del 1 al 6

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $A = \{2, 4, 6\}$
 $P(A) = 3/6 = 1/2 = 0,5$

15. Calcula la probabilidad de obtener un número múltiplo de 4 al lanzar al aire un dado con forma de dodecaedro y con las caras numeradas del 1 al 12

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
 $A = \{4, 8, 12\}$
 $P(A) = 3/12 = 1/4 = 0,25$

16. Calcula la probabilidad de obtener una copa al extraer una carta de una baraja francesa.

$E = \{10, 20, 30, \dots, 11B, 12B\}$
 $A = \{1C, 2C, 3C, \dots, 11C, 12C\}$
 $P(A) = 10/40 = 1/4 = 0,25$

17. Calcula la probabilidad de obtener una K al extraer una carta de una baraja francesa.

$E = \{1RC, 2RC, 3RC, \dots, QNT, KNT\}$
 $A = \{KRC, KR D, KNP, KNT\}$
 $P(A) = 4/52 = 1/13 = 0,077$

18. En una caja hay 80 tornillos, de los que 5 son defectuosos, y se extrae uno al azar. Calcula la probabilidad de que sea uno de los defectuosos.

$E = \{80 \text{ tornillos}\}$
 $A = \{5 \text{ defectuosos}\}$
 $P(A) = 5/80 = 1/16 = 0,0625$

19. El delantero de un equipo de fútbol mete dos goles de cada 5 balones que tira a puerta. ¿Cuál es la probabilidad de que la próxima vez que tire a puerta meta gol?

$E = \{5 \text{ balones}\}$
 $A = \{2 \text{ goles}\}$
 $P(A) = 2/5 = 0,4$

4. EXPERIMENTOS COMPUESTOS

PIENSA Y CALCULA

Una familia tiene dos hijos. Calcula mentalmente:

- a) La probabilidad de que los dos sean varones.
- b) La probabilidad de que los dos sean mujeres.
- c) La probabilidad de que uno sea varón, y el otro, mujer.

a) $1/4$ b) $1/4$ c) $1/2$

CARNÉ CALCULISTA

Calcula la generatriz de un cono recto en el que el radio de la base mide 3,5 m, y la altura, 7,5 m. Redondea el resultado a dos decimales.

$G = 8,28 \text{ m}$

APLICA LA TEORÍA

20. Haz un diagrama cartesiano para el experimento de lanzar al aire dos monedas, y calcula la probabilidad de obtener:

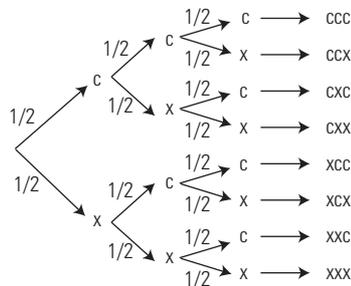
- a) Dos caras.
- b) Dos cruces.
- c) Una cara y una cruz.

	C	X
C	(C, C)	(C, X)
X	(X, C)	(X, X)

- a) $P(2C) = P(C, C) = 1/4$
- b) $P(2X) = P(X, X) = 1/4$
- c) $P(1C \text{ y } 1X) = P(C, X) + P(X, C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

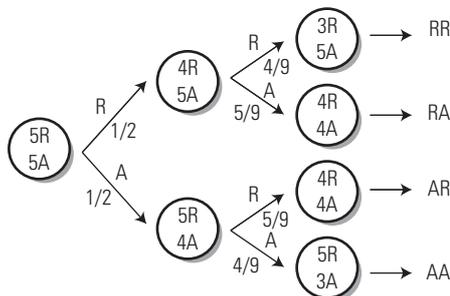
21. Haz un diagrama en árbol para el experimento de lanzar al aire tres monedas, y calcula la probabilidad de obtener:

- a) Tres caras.
- b) Dos caras y una cruz.
- c) Una cara y dos cruces.
- d) Tres cruces.



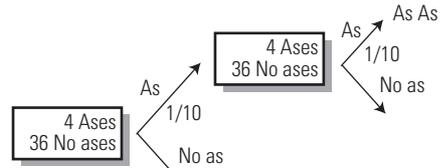
- a) $P(3C) = P(CCC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0,125$
- b) $P(2C \text{ y } 1X) = P(CCX) + P(CXC) + P(XCC) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0,375$
- c) $P(1C \text{ y } 2X) = P(CXX) + P(XCX) + P(XXC) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0,375$
- d) $P(3X) = P(XXX) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0,125$

22. Halla la probabilidad de obtener dos bolas azules al extraer dos bolas sin devolución de una urna que contiene 5 bolas rojas y 5 azules.



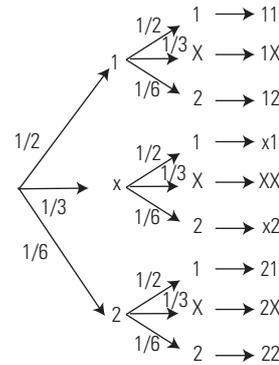
$$P(2A) = P(A) \cdot P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9} = 0,22$$

23. Halla la probabilidad de obtener dos ases al extraer dos cartas con devolución de una baraja española de 40 cartas.



$$P(2 \text{ Ases}) = P(\text{As}) \cdot P(\text{As}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = 0,01$$

24. Halla la probabilidad de obtener un 1 y una X, o una X y un 1, al lanzar un dado de quinielas dos veces.



$$P(1X \text{ o } X1) = P(1X) + P(X1) = P(1) \cdot P(X) + P(X) \cdot P(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

25. Haz el diagrama cartesiano del experimento de lanzar al aire una moneda y un dado de 6 caras, y calcula la probabilidad de obtener cara y múltiplo de 3

	1	2	3	4	5	6
C	(C, 1)	(C, 2)	(C, 3)	(C, 4)	(C, 5)	(C, 6)
X	(X, 1)	(X, 2)	(X, 3)	(X, 4)	(X, 5)	(X, 6)

$$P(C \text{ y } m(3)) = 2/12 = 1/6$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. EXPERIMENTOS ALEATORIOS

26. Clasifica los siguientes experimentos en deterministas o de azar:

- a) Dejar caer un libro desde una mesa.
- b) Lanzar un dado al aire.
- c) Extraer una bola de color de una bolsa sin ver el interior.
- d) Apagar el interruptor de la luz.

Deterministas: a) y d).

De azar: b) y c).

27. Escribe dos experimentos de azar.

- a) Lanzar un dado de quinielas.
- b) Jugar al bingo.

28. Escribe dos experimentos deterministas.

- a) Abrir una puerta.
- b) Hallar el área de un cuadrado de 5 m de lado.

42. En el equipo de música de un coche hemos metido 10 CD: cuatro son de rock; tres, de música clásica; y tres, de música flamenca. Si elegimos uno al azar, calcula la probabilidad de que sea de rock.

$$E = \{4R, 3C, 3F\}$$

$$A = \{4R\}$$

$$P(A) = 4/10 = 2/5 = 0,4$$

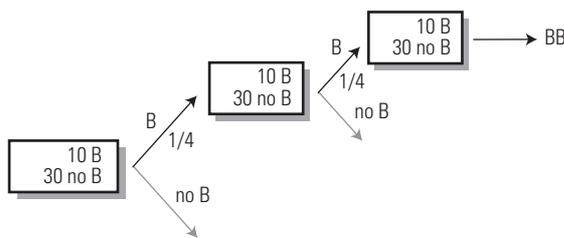
4. EXPERIMENTOS COMPUESTOS

43. Calcula la probabilidad de obtener dos números que sumen 5 al lanzar al aire dos dados.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

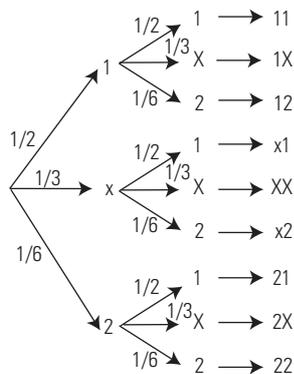
$$P(\text{Suma } 5) = 4/36 = 1/9 = 0,11$$

44. Halla la probabilidad de obtener dos bastos al extraer con devolución dos cartas de una baraja española de 40 cartas.



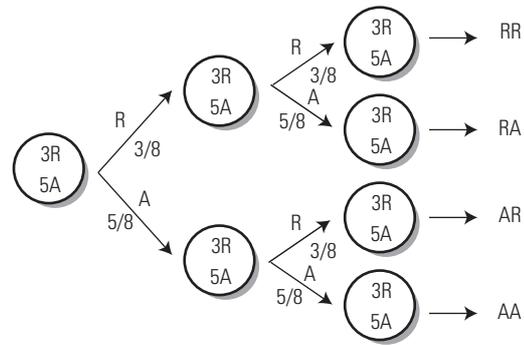
$$P(BB) = P(B) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = 0,0625$$

45. Halla la probabilidad de obtener un 1 y un 2, o un 2 y un 1, al lanzar dos veces un dado de quinielas.



$$P(12) + P(21) = P(1) \cdot P(2) + P(2) \cdot P(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

46. Halla la probabilidad de obtener dos bolas de distinto color al extraer dos bolas con devolución de una urna que contiene 3 bolas rojas y 5 azules.



$$P(\text{Distinto color}) = P(RA) + P(AR) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{32} = 0,47$$

47. Calcula la probabilidad de obtener cara y un número par al lanzar al aire una moneda y un dado.

	1	2	3	4	5	6
C	(C, 1)	(C, 2)	(C, 3)	(C, 4)	(C, 5)	(C, 6)
X	(X, 1)	(X, 2)	(X, 3)	(X, 4)	(X, 5)	(X, 6)

$$P(C \text{ y par}) = 3/12 = 1/4 = 0,25$$

PARA AMPLIAR

48. En el experimento de lanzar una moneda al aire, halla:

- a) El espacio muestral.
- b) Los sucesos elementales.
- c) Si $A = \{C\}$, el suceso contrario \bar{A}
- d) Si $B = \{X\}$, el suceso $A \cup B$
- e) El suceso $A \cap B$. ¿Los sucesos A y B son compatibles o incompatibles?

- a) $E = \{C, X\}$
- b) $\{C\}, \{X\}$
- c) $\bar{A} = \{X\}$
- d) $A \cup B = \{C, X\} = E$
- e) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A$ y B son incompatibles.

49. Si $P(Z) = 1$, ¿cuál es el suceso Z ?

$Z = E$, es el suceso seguro.

50. Si $P(Y) = 0$, ¿cuál es el suceso Y ?

$Y = \emptyset$, es el suceso imposible.

51. Si $P(A) = 0,5$, ¿cuál es más probable, A o \bar{A} ?

$P(\bar{A}) = 0,5$
Son igualmente probables, es decir, equiprobables.

52. Si $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/2$ y $P(A \cup B) = 5/6$, ¿cómo son los sucesos A y B , compatibles o incompatibles?

$$P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, A y B son incompatibles.

53. Aplicando la regla de Laplace, calcula la probabilidad de obtener una bola de color azul al extraer una bola de una urna que contiene 5 bolas azules. ¿Qué puedes decir del suceso «extraer bola azul»?

$$E = \{5A\}$$

$$A = \{5A\}$$

$$P(A) = 5/5 = 1$$

El suceso «extraer bola azul» es el suceso seguro.

54. Al lanzar al aire una moneda de 1 €, ¿qué es más probable, que salga cara o que salga cruz?

Son igualmente probables, es decir, equiprobables.

55. En un dado de quinielas, ¿cuál de los signos 1, X, 2 es el más probable?

$$E = \{1, 1, 1, X, X, 2\}$$

Es más probable el 1

56. Calcula la probabilidad de obtener una bola de color rojo o verde al extraer una bola de una urna que contiene 5 bolas rojas, 6 azules y 7 verdes.

$$E = \{5R, 6A, 7V\}$$

$$A = \{5R, 7V\}$$

$$P(A) = 12/18 = 2/3 = 0,67$$

57. Calcula la probabilidad de obtener un número múltiplo de 2 y de 3 al lanzar al aire un dado con forma de icosaedro, con las caras numeradas del 1 al 20

$$E = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$$

$$A = \{6, 12, 18\}$$

$$P(A) = 3/20 = 0,15$$

58. Calcula la probabilidad de obtener un as o un rey al extraer una carta de una baraja española de 52 cartas.

$$E = \{10, 20, 30, \dots, 11B, 12B\}$$

$$A = \{\text{As O, As C, As E, As B, 12O, 12C, 12E, 12B}\}$$

$$P(A) = 8/52 = 2/13 = 0,15$$

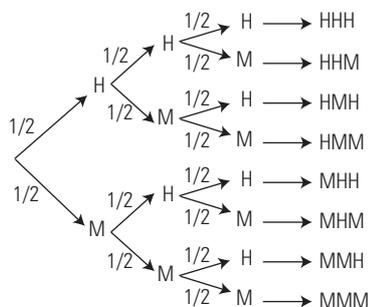
59. Calcula la probabilidad de obtener una carta de corazones al extraer una carta de una baraja francesa.

$$E = \{1RC, 2RC, 3RC, \dots, QNT, KNT\}$$

$$A = \{1RC, 2RC, 3RC, \dots, QRC, KRC\}$$

$$P(A) = 13/52 = 1/4 = 0,25$$

60. Calcula la probabilidad de que, en una familia con tres hijos, sean los tres del mismo sexo.



$$P(\text{Mismo sexo}) = P(\text{HHH}) + P(\text{MMM}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

CON CALCULADORA

61. Si A y B son sucesos incompatibles y $P(A) = 2/7$, $P(B) = 7/15$, calcula $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 2/7 + 7/15 = 79/105 = 0,75$$

62. Si $P(A) = 2/9$, $P(B) = 3/5$ y $P(A \cap B) = 1/8$, calcula $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{9} + \frac{3}{5} - \frac{1}{8} = \frac{251}{360} = 0,70$$

PROBLEMAS

63. En el experimento de lanzar al aire un dado con forma de cubo, con las caras numeradas del 1 al 6, halla:

- El espacio muestral.
- Los sucesos elementales.
- El suceso A formado por los números pares.
- El suceso contrario \bar{A}
- El suceso B , formado por los números impares.
- El suceso $A \cup B$
- El suceso $A \cap B$. ¿Los sucesos A y B son compatibles o incompatibles?

$$a) E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$b) \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\} \text{ y } \{6\}$$

$$c) A = \{2, 4, 6\}$$

$$d) \bar{A} = \{1, 3, 5\}$$

$$e) B = \{1, 3, 5\}$$

$$f) A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$$

$$g) A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \text{ y } B \text{ son incompatibles.}$$

64. Aplicando la regla de Laplace, calcula la probabilidad de obtener una bola de color rojo al extraer una bola de una urna que contiene 5 bolas verdes y 6 rojas.

$$E = \{5V, 6R\}$$

$$A = \{6R\}$$

$$P(A) = 6/11 = 0,55$$

65. Aplicando la regla de Laplace, calcula la probabilidad de obtener una carta de oros al extraer una carta de una baraja española de 40 cartas.

$$E = \{10, 20, 30, \dots, 11B, 12B\}$$

$$A = \{10, 20, 30, \dots, 11O, 12O\}$$

$$P(A) = 10/40 = 1/4 = 0,25$$

66. Si $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,7$ y $P(A \cap B) = 0,4$, calcula $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,7 - 0,4 = 0,8$$

67. Calcula la probabilidad de obtener un número primo al lanzar al aire un dado de forma cúbica con las caras numeradas del 1 al 6

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{2, 3, 5\}$$

$$P(A) = 3/6 = 1/2 = 0,5$$

68. Calcula la probabilidad de obtener un número múltiplo de 3 y 4 al lanzar al aire un dado con forma de icosaedro con las caras numeradas del 1 al 20

$$E = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$$

$$A = \{12\}$$

$$P(A) = 1/20 = 0,05$$

69. Calcula la probabilidad de obtener una figura al extraer una carta de una baraja española de 40 cartas.

$$E = \{10, 20, 30, \dots, 11B, 12B\}$$

$$A = \{10O, 10C, 10E, \dots, 11B, 12B\}$$

$$P(A) = 12/40 = 3/10 = 0,3$$

70. Calcula la probabilidad de obtener un as o una K al extraer una carta de una baraja francesa.

$$E = \{1RC, 2RC, 3RC, \dots, QNT, KNT\}$$

$$A = \{1RC, 1RD, 1NP, 1NT, KRC, KRD, KNP, KNT\}$$

$$P(A) = 8/52 = 2/13 = 0,15$$

71. Cuatro niños y cinco niñas forman un círculo. En el centro está Lola, con los ojos tapados. Calcula la probabilidad de que coja a un niño.

$$E = \{4OS, 5AS\}$$

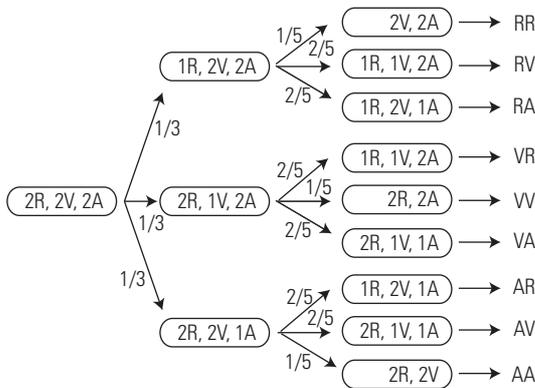
$$A = \{4OS\}$$

$$P(A) = 4/9 = 0,44$$

72. Un dado trucado tiene las siguientes probabilidades $P(1) = P(3) = P(5) = 0,1$; $P(6) = 0,3$ y $P(2) = P(4) = 0,2$. Calcula la probabilidad de obtener número par.

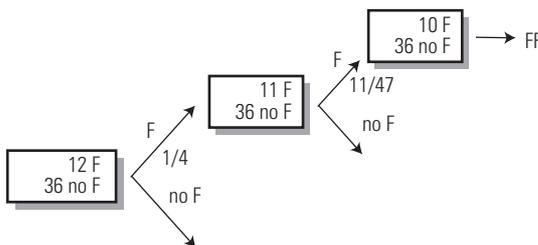
$$P(\text{Par}) = P(2) + P(4) + P(6) = 0,2 + 0,2 + 0,3 = 0,7$$

73. Sonia tiene en un cajón totalmente desordenado un par de calcetines de color rojo, otro par de color verde y otro par de color azul. Un día se viste a oscuras. Calcula la probabilidad de que se haya puesto los dos calcetines del mismo color.



$$P(2R) + P(2V) + P(2A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} = 0,2$$

74. Halla la probabilidad de obtener dos figuras al extraer sin devolución dos cartas de una baraja española de 48 cartas.



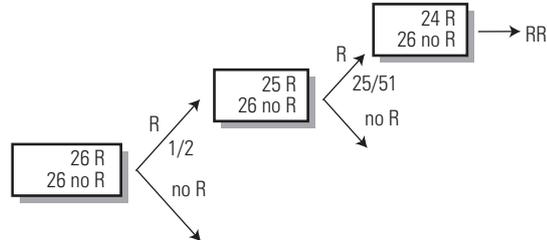
$$P(2F) = P(F) \cdot P(F) = \frac{1}{4} \cdot \frac{11}{47} = \frac{11}{188} = 0,06$$

75. Se lanzan dos dados al aire. Calcula la probabilidad de que el producto de los dos números obtenidos sea 12

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

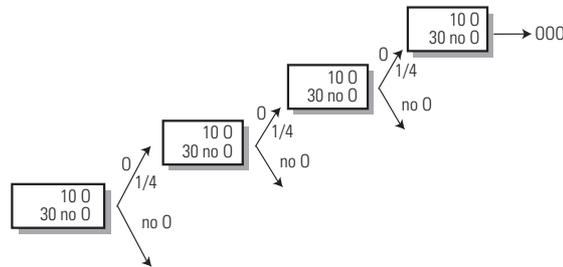
$$P(\text{Producto } 12) = 4/36 = 1/9 = 0,11$$

76. Halla la probabilidad de obtener dos cartas rojas al extraer de una vez dos cartas de una baraja francesa.



$$P(2R) = P(R) \cdot P(R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{51} = \frac{25}{102} = 0,25$$

77. Halla la probabilidad de obtener tresoros al extraer con devolución tres cartas de una baraja española de 40 cartas.



$$P(3O) = P(O) \cdot P(O) \cdot P(O) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64} = 0,016$$

PARA PROFUNDIZAR

78. Si A y B son sucesos incompatibles, ¿puede ser $P(A) = 1/2$ y $P(B) = 3/4$?

No porque la suma, $1/2 + 3/4 = 5/4$, es mayor que uno.

79. Aplicando la regla de Laplace, calcula la probabilidad de obtener un cinco al extraer una carta de una baraja española de 40 cartas.

$$E = \{10, 20, 30, \dots, 11B, 12B\}$$

$$A = \{50, 5C, 5E, 5B\}$$

$$P(A) = 4/40 = 1/10 = 0,1$$

80. Si A y B son sucesos compatibles, ¿puede ser $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,5$ y $P(A \cap B) = 0,4$?

No, porque la probabilidad de $A \cap B$ no puede ser mayor que la de A .

81. Aplicando la regla de Laplace, calcula la probabilidad de obtener una bola de color negro al extraer una bola de una urna que contiene 2 bolas rojas y 3 azules. (El enunciado de este problema es correcto).

$$E = \{2R, 3A\}$$

$$A = \{N\} = \emptyset$$

$$P(A) = 0$$

82. Calcula la probabilidad de obtener una bola de color rojo o azul al extraer una bola de una urna que tiene 4 bolas rojas, 5 azules y 3 verdes.

$$E = \{4R, 5A, 3V\}$$

$$A = \{4R, 5A\}$$

$$P(A) = 9/12 = 3/4 = 0,75$$

83. Calcula la probabilidad de obtener un número par y múltiplo de 3 al lanzar al aire un dado con forma de dodecaedro y con las caras numeradas del 1 al 12

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$A = \{6, 12\}$$

$$P(A) = 2/12 = 1/6 = 0,17$$

84. Calcula la probabilidad de no obtener una figura al extraer una carta de una baraja española de 48 cartas.

$$E = \{10, 20, 30, \dots, 11B, 12B\}$$

$$A = \{100, 10C, 10E, \dots, 11B, 12B\}$$

$$P(A) = 12/40 = 3/10 = 0,3$$

$$P(\bar{A}) = 1 - 0,3 = 0,7$$

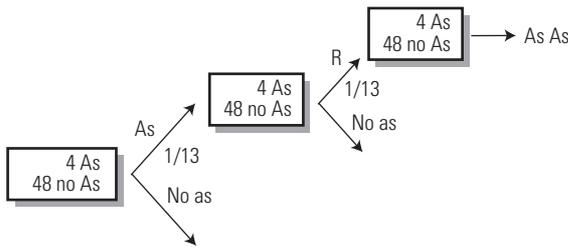
85. Un dado trucado tiene las siguientes probabilidades: $P(1) = x$, $P(2) = 2x$, $P(3) = 3x$, $P(4) = 4x$, $P(5) = 5x$, $P(6) = 6x$. Calcula la probabilidad de obtener número impar.

$$x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1$$

$$21x = 1 \Rightarrow x = 1/21$$

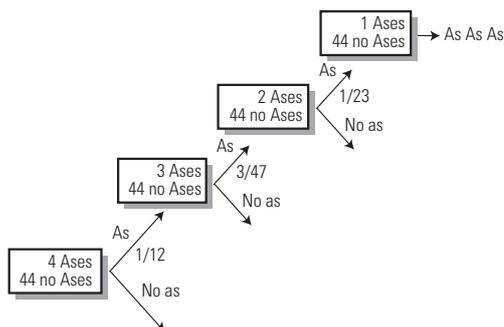
$$P(\text{Impar}) = P(1) + P(3) + P(5) = \frac{1}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7} = 0,43$$

86. Halla la probabilidad de obtener dos ases al extraer con devolución dos cartas de una baraja francesa.



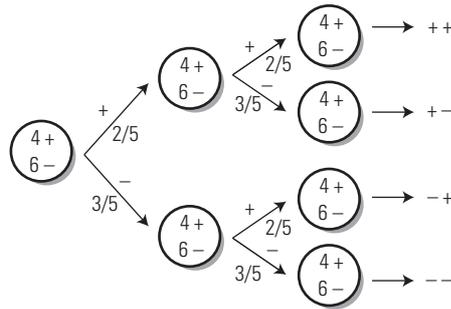
$$P(2 \text{ Ases}) = P(\text{As}) \cdot P(\text{As}) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{169}$$

87. Halla la probabilidad de obtener tres ases al extraer de una vez tres cartas de una baraja española de 48 cartas.



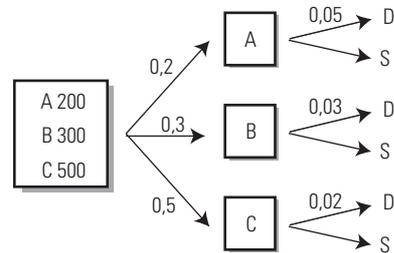
$$P(3 \text{ Ases}) = P(\text{As}) \cdot P(\text{As}) \cdot P(\text{As}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{47} \cdot \frac{1}{23} = \frac{1}{4324}$$

88. En una urna tenemos 4 bolas marcadas con el signo + y 6 bolas marcadas con el signo -. Extraemos dos bolas con devolución. Calcula la probabilidad de que las dos bolas tengan el mismo signo.



$$P(\text{Mismo signo}) = P(++) + P(--) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{13}{25} = 0,52$$

89. Una fábrica tiene tres máquinas, A, B y C. La máquina A hace 200 piezas cada hora, la B hace 300 y la C hace 500. Mediante los controles de calidad, se sabe que la máquina A hace un 5% de piezas defectuosas, la B un 3% y la C un 2%. Calcula el tanto por ciento de piezas defectuosas que produce la fábrica.



$$P(\text{Defectuosa}) = 0,2 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,03 + 0,5 \cdot 0,02 = 0,029 = 2,9 \%$$

APLICA TUS COMPETENCIAS

90. Un laboratorio farmacéutico crea dos medicamentos, A y B. El medicamento A se ensaya en 50 pacientes, y mejoran 35 de ellos; el medicamento B se ensaya en 75 pacientes, y de ellos mejoran 45. ¿Cuál de los dos medicamentos es más eficaz?

Medicamento A:
 $E = \{50 \text{ personas}\}; A = \{35 \text{ mejoran}\}$
 $P(A) = 35/50 = 7/10 = 0,7$

Medicamento B:
 $E = \{75 \text{ personas}\}; B = \{45 \text{ mejoran}\}$
 $P(B) = 45/75 = 3/5 = 0,6$

Es más eficaz el medicamento A.

91. En un grupo de alto riesgo, compuesto por 60 personas, se prueba una vacuna A contra la gripe; contraen la enfermedad 15 de ellas. En otro grupo de alto riesgo, formado por 50 personas, se prueba otra vacuna B contra la gripe; contraen la enfermedad 12 de ellas. ¿Cuál de las dos vacunas es más eficaz?

Medicamento A:
 $E = \{60 \text{ personas}\}; A = \{45 \text{ no enferman}\}$
 $P(A) = 45/60 = 3/4 = 0,75$

Medicamento B:
 $E = \{50 \text{ personas}\}; B = \{38 \text{ no enferman}\}$
 $P(B) = 38/50 = 19/25 = 0,76$

Es ligeramente más eficaz la vacuna B.

92. Un laboratorio farmacéutico crea dos medicamentos (A y B) contra el sida. El medicamento A se ensaya en 80 pacientes, y mejoran 25 de ellos; el medicamento B se ensaya en 60 pacientes, y de ellos mejoran 15. ¿Cuál de los dos medicamentos es más eficaz?

Medicamento A:

$E = \{80 \text{ personas}\}; A = \{25 \text{ mejoran}\}$

$P(A) = 25/80 = 5/16 = 0,31$

Medicamento B:

$E = \{60 \text{ personas}\}; B = \{15 \text{ mejoran}\}$

$P(B) = 15/60 = 1/4 = 0,25$

Es más eficaz el medicamento A.

COMPRUEBA LO QUE SABES

1. Escribe la regla de Laplace y pon un ejemplo.

La **regla de Laplace** dice: la probabilidad de un suceso A, de un espacio muestral E, formado por sucesos elementales **equiprobables** es igual al número de casos favorables dividido por el número de casos posibles.

$$P(A) = \frac{\text{N.º de casos favorables al suceso } A}{\text{N.º de casos posibles}}$$

Ejemplo:

Halla la probabilidad de obtener un múltiplo de 3 al lanzar un dado de 6 caras.

Espacio muestral: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Suceso $A = \{3, 6\}$

$$P(A) = 2/6 = 1/3 = 0,33$$

2. Clasifica los siguientes experimentos como deterministas o de azar:

- a) Sacar una bola de una urna con bolas de distintos colores.
- b) Poner un helado al Sol.
- c) Salir de paseo sin paraguas mientras está lloviendo.
- d) Lanzar al aire un dado de quinielas.

Deterministas: b) y c).

Azar: a) y d).

3. Lanzamos 80 veces un dado defectuoso y sale 24 veces el número 5. Halla:

- a) La frecuencia absoluta de obtener 5
- b) La frecuencia relativa de obtener 5

a) $n = 24$

b) $f = 24/80 = 3/10 = 0,3$

4. Si los sucesos A y B son compatibles y $P(A) = 2/3$, $P(B) = 2/5$, $P(A \cap B) = 1/4$, calcula $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{49}{60} = 0,82$$

5. Calcula la probabilidad de obtener un múltiplo de 3 al lanzar al aire un dado de ocho caras numeradas del 1 al 8

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $A = \{3, 6\}$

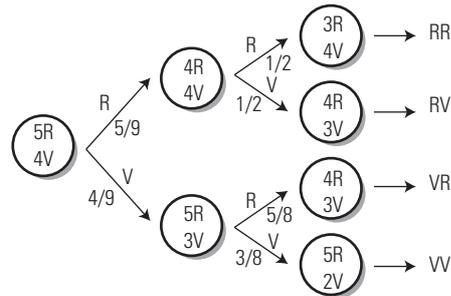
$P(A) = 2/8 = 1/4 = 0,25$

6. Calcula la probabilidad de que, al lanzar al aire dos dados con forma de tetraedro y con las caras numeradas del 1 al 4, los números obtenidos sumen 6

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

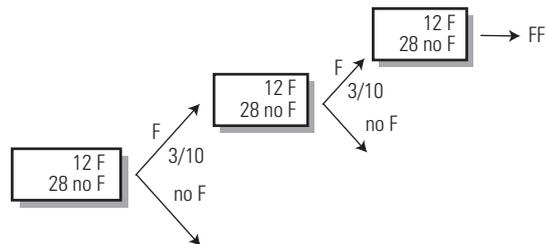
$$P(\text{Suma } 6) = 3/16 = 0,1875$$

7. Halla la probabilidad de obtener dos bolas del mismo color al extraer sin devolución dos bolas de una urna que contiene 5 bolas rojas y 4 verdes.



$$P(RR) + P(VV) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{7} = \frac{4}{9} = 0,44$$

8. Calcula la probabilidad de obtener dos figuras al extraer dos cartas con devolución de una baraja española de 40 cartas.



$$P(2F) = \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} = \frac{9}{100} = 0,09$$

WINDOWS EXCEL

WINDOWS/LINUX CALC

PASO A PASO

93. Investiga sobre la Ley de los grandes números: simula el lanzamiento de un dado con forma de tetraedro y con las caras numeradas del 1 al 4. Haz distintos lanzamientos, cuenta el número de lanzamientos y las frecuencias absolutas de obtener una de las caras, por ejemplo el 3. Calcula las frecuencias relativas y represéntalas en un gráfico de líneas. ¿Hacia qué valor tienden las frecuencias relativas, que en definitiva es la probabilidad?

Resuelto en el libro del alumnado.

PRACTICA

94. En la Hoja2 del mismo libro, investiga sobre la Ley de los grandes números: simula el lanzamiento de un dado de forma cúbica con las caras numeradas del 1 al 6. Realiza distintos lanzamientos y cuenta el número de lanzamientos y las frecuencias absolutas de obtener una de las caras, por ejemplo, el 5. Calcula las frecuencias relativas y represéntalas en un gráfico de líneas. ¿Hacia qué valor tienden las frecuencias relativas, que en definitiva es la probabilidad?

La fórmula que hay que introducir en la celda A1 es: = 1 + ENTERO(6 * ALEATORIO())

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Lanzamiento del dado										Nº lanzamientos	Fr. Abs. 5	Fr. Rel. 5
2	1	6	5	6	4	5	6	3	4	1	10	2	0,2000
3	3	2	1	2	3	3	1	3	2	2	20	2	0,1000
4	2	1	4	1	2	5	1	3	6	3	30	3	0,1000
5	4	5	4	5	6	5	1	3	1	3	40	6	0,1500
6	2	2	6	4	1	1	2	1	5	3	50	7	0,1400
7	6	6	3	6	1	4	3	6	2	1	60	7	0,1167
8	4	1	2	2	2	3	5	5	2	6	70	9	0,1286
9	1	3	6	4	5	4	4	1	6	3	80	10	0,1250
10	5	6	3	5	6	3	4	5	5	5	90	15	0,1667
11	3	3	5	2	1	5	1	3	5	4	100	18	0,1800
12	6	1	6	1	3	2	1	6	1	2	110	18	0,1636
13	2	4	6	3	4	1	3	5	3	4	120	19	0,1583
14	3	4	4	5	3	2	5	6	4	5	130	22	0,1692
15	2	4	2	4	4	1	5	3	3	4	140	23	0,1643
16	6	6	3	3	3	4	5	3	2	4	150	24	0,1600
17	2	1	3	6	4	1	2	3	2	1	160	24	0,1500
18	5	6	4	1	5	5	1	5	6	3	170	28	0,1647
19	3	1	1	5	4	5	1	3	1	6	180	30	0,1667
20	2	1	3	6	3	3	2	2	5	3	190	31	0,1632
21	6	5	5	1	4	6	5	2	6	2	200	34	0,1700



95. En la Hoja3 del mismo libro, haz otro estudio análogo al anterior para un dado de forma octaédrica, con las caras numeradas del 1 al 8, y relativo a obtener, por ejemplo, el 6. ¿Hacia qué valor tienden las frecuencias relativas, que en definitiva es la probabilidad?

La fórmula que hay que introducir en la celda A1 es: = 1 + ENTERO(8 * ALEATORIO())

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Lanzamiento del dado										Nº lanzamientos	Fr. Abs. 6	Fr. Rel. 6
2	8	5	6	1	8	4	8	1	1	1	10	1	0,1000
3	2	7	7	6	5	5	4	8	5	7	20	2	0,1000
4	2	8	4	7	3	4	4	2	8	2	30	2	0,0667
5	5	8	2	8	5	7	2	1	1	3	40	2	0,0500
6	6	7	2	3	2	2	3	1	8	4	50	3	0,0600
7	6	6	8	2	7	2	3	6	6	2	60	7	0,1167
8	7	3	3	6	5	5	8	6	8	5	70	9	0,1286
9	5	3	6	6	4	5	2	4	8	8	80	11	0,1375
10	7	3	2	7	2	6	8	3	6	5	90	13	0,1444
11	1	8	6	1	2	8	4	3	8	1	100	14	0,1400
12	4	4	2	7	5	6	3	7	1	5	110	15	0,1364
13	2	7	4	8	7	5	2	7	8	6	120	16	0,1333
14	2	1	4	2	5	1	1	6	7	6	130	18	0,1385
15	2	5	4	1	7	1	8	2	8	3	140	18	0,1286
16	6	3	6	1	5	5	8	3	2	5	150	20	0,1333
17	5	1	1	1	8	7	1	2	7	3	160	20	0,1250
18	2	8	3	2	7	5	3	2	8	6	170	21	0,1235
19	7	4	8	6	2	8	6	7	6	1	180	24	0,1333
20	7	8	8	5	7	8	8	2	4	4	190	24	0,1263
21	7	1	5	8	5	8	7	4	6	8	200	25	0,1250



96. En la Hoja4 del mismo libro, haz otro estudio análogo al anterior para un dado con forma de dodecaedro, con las caras numeradas del 1 al 12, y para obtener la cara 9. ¿Hacia qué valor tienden las frecuencias relativas, que en definitiva es la probabilidad?

La fórmula que hay que introducir en la celda A1 es: = 1 + ENTERO(12 * ALEATORIO())

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Lanzamiento del dado										Nº lanzamientos	Fr. Abs. 9	Fr. Rel. 9
2	9	10	5	7	10	11	6	6	4	10	10	1	0,1000
3	5	9	11	12	6	3	2	2	11	7	20	2	0,1000
4	1	8	3	1	9	11	2	9	3	12	30	4	0,1333
5	1	11	4	2	6	11	5	5	12	5	40	4	0,1000
6	1	7	5	12	3	6	12	7	5	4	50	4	0,0800
7	1	4	4	6	1	8	12	8	9	3	60	5	0,0833
8	6	6	12	9	7	1	4	12	12	10	70	6	0,0857
9	10	2	10	5	2	8	5	11	11	6	80	6	0,0750
10	6	12	5	4	12	2	1	11	5	11	90	6	0,0667
11	7	9	7	5	6	6	4	6	1	7	100	7	0,0700
12	5	4	9	11	10	6	11	9	1	11	110	9	0,0818
13	12	6	11	11	2	1	1	10	8	11	120	9	0,0750
14	11	11	9	4	1	11	3	1	4	6	130	10	0,0769
15	5	6	9	3	9	2	11	1	3	1	140	12	0,0857
16	4	1	1	10	3	8	11	12	7	3	150	12	0,0800
17	1	9	3	6	10	8	9	2	1	2	160	14	0,0875
18	5	6	4	10	4	2	9	10	12	1	170	15	0,0882
19	6	7	8	5	1	7	10	3	6	8	180	15	0,0833
20	9	7	10	6	7	1	6	6	8	2	190	16	0,0842
21	9	7	1	7	4	5	12	6	5	12	200	17	0,0850



97. En la Hoja5 del mismo libro, haz otro estudio análogo al anterior para un dado con forma de icosaedro, con las caras numeradas del 1 al 20, y para obtener, por ejemplo, el 15. ¿Hacia qué valor tienden las frecuencias relativas, que en definitiva es la probabilidad?

La fórmula que hay que introducir en la celda A1 es: = 1 + ENTERO(20 * ALEATORIO())

1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Lanzamiento del dado										Nº lanzamie	Fr. Abs. 9	Fr. Rel. 9
2	4	6	4	8	16	15	8	7	7	9	10	1	0,1000
3	16	19	12	11	3	14	7	14	1	5	20	1	0,0500
4	17	18	17	16	7	19	5	20	7	4	30	1	0,0333
5	3	5	16	4	7	14	3	2	12	1	40	1	0,0250
6	15	12	11	2	17	19	15	7	4	14	50	3	0,0600
7	14	12	18	17	20	15	2	16	6	15	60	5	0,0833
8	11	11	12	3	6	3	5	8	15	16	70	6	0,0857
9	13	18	5	9	14	12	14	9	3	17	80	6	0,0750
10	14	5	6	19	11	13	16	6	3	6	90	6	0,0667
11	8	16	20	3	6	11	17	5	3	6	100	6	0,0600
12	19	4	12	13	13	2	8	12	7	3	110	6	0,0545
13	7	1	1	1	4	19	3	16	1	6	120	6	0,0500
14	5	2	7	4	7	13	3	12	18	18	130	6	0,0462
15	12	13	4	16	9	8	15	3	6	18	140	7	0,0500
16	15	12	13	8	12	17	7	1	18	12	150	8	0,0533
17	20	19	15	3	11	4	14	7	6	16	160	9	0,0563
18	4	5	11	6	6	11	11	7	10	9	170	9	0,0529
19	11	13	2	15	10	16	13	5	8	1	180	10	0,0556
20	7	9	20	9	12	16	20	18	3	20	190	10	0,0526
21	19	14	4	13	1	8	8	7	10	8	200	10	0,0500



98. Al final, guarda el libro en tu carpeta personal con el nombre 3C14 completo con todas las hojas de cálculo.

Haz clic en el icono  Guardar.

Evaluación de diagnóstico

BLOQUE V: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Elige la respuesta correcta:

1. El peso en gramos que aumentan 40 lactantes durante la primera quincena de vida se ha recogido en la siguiente tabla:

Intervalo	n_i
160-220	2
220-280	6
280-340	20
340-400	7
400-460	5

Calcula la moda, la mediana y la media e interpreta el resultado.

Intevalo	x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
160-220	190	2	2	380
220-280	250	6	8	1500
280-340	310	20	28	6200
340-400	370	7	35	2590
400-460	430	5	40	2150
Total		40		12820

Moda: 310

Mediana: 310

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{12820}{40} = 320,5$$

El peso que aumentan los lactantes durante los primeros 15 días se distribuye alrededor de 320,5 g

2. El número de horas que dedica un grupo de jóvenes a realizar deporte se ha recogido en la siguiente tabla:

N.º de horas	0	1	2	3	4	5
n_i	2	5	8	2	2	1

Calcula los parámetros de centralización y de dispersión que tengan sentido e interpreta los resultados.

x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
0	2	2	0	0
1	5	7	5	5
2	8	15	16	32
3	2	17	6	18
4	2	19	8	32
5	1	20	5	25
Total	20		40	112

Moda: 2

Mediana: 2

$$\text{Media: } \bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N} \Rightarrow \bar{x} = \frac{40}{20} = 2$$

Parámetros de dispersión:

$$\text{Varianza: } V = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N} - \bar{x}^2 \Rightarrow V = \frac{112}{20} - 2^2 = 1,6$$

$$\sigma = \sqrt{V} \Rightarrow \sigma = \sqrt{1,6} = 1,26$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow CV = 1,26 : 2 = 0,63 = 63\% > 30\%$$

Los datos se distribuyen alrededor de 2 horas con una dispersión muy grande.

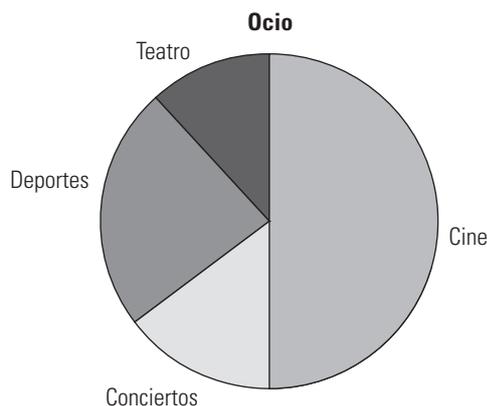
3. Preguntadas 39 personas sobre sus espectáculos favoritos dieron el siguiente resultado:

Espectáculo	n_i
Cine	20
Conciertos	6
Deportes	10
Teatro	4

Haz un diagrama de sectores e interpreta el resultado.

$$\frac{360^\circ}{40} = 9^\circ$$

x_i	n_i	Ángulo
Cine	20	$20 \cdot 9^\circ = 180^\circ$
Conciertos	6	$6 \cdot 9^\circ = 54^\circ$
Deportes	10	$10 \cdot 9^\circ = 90^\circ$
Teatro	4	$4 \cdot 9^\circ = 36^\circ$
Total	40	360°



La mitad de las personas prefiere el cine y una cuarta parte el deporte. El teatro y los conciertos ocupan la otra cuarta parte.

4. Las notas de Rosa en las dos primeras evaluaciones de matemáticas han sido 3,5 y 4,6. Quiere tener como media de las tres evaluaciones al menos un 5. ¿Cuánto tendrá que sacar, por lo menos, en la tercera evaluación?

Sea n la tercera nota,

$$\bar{x} = \frac{3,5 + 4,6 + n}{3}$$

$$5 = \frac{8,1 + n}{3}$$

$$n = 15 - 8,1 = 6,9$$

5. Se realiza el experimento aleatorio de lanzar dos veces un dado numerado de seis caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea divisible entre tres?

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(\text{Divisible entre 3}) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

6. En una bolsa hay 10 bolas numeradas del 11 al 20, idénticas, salvo en el color, pues unas son rojas y las otras verdes. Sacamos sin mirar, una bola.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número primo?

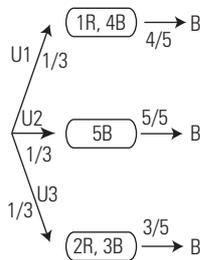
b) Se sabe que la probabilidad de sacar bola verde es 3/5. ¿Cuántas bolas hay de cada color?

a) $E = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$
 Primo = $\{11, 13, 17, 19\}$

$$P(\text{Primo}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

b) $P(V) = \frac{3}{5} \Rightarrow \text{Verdes} = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6$

7. Se tienen tres urnas de idéntico aspecto. En la primera hay 1 bola roja y 4 blancas. En la segunda hay 5 blancas y en la tercera hay 2 rojas y 3 blancas. Se extrae una bola de una urna elegida al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea blanca?



$$P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

8. Un dado está trucado de tal forma que las probabilidades de obtener cada uno de los números de las caras son las que se recogen en la tabla siguiente:

Número	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	1/4	1/5	1/4	1/10	k	1/10

- a) ¿Qué probabilidad corresponde al suceso obtener 5?
- b) ¿Qué probabilidad corresponde al suceso obtener puntuación impar?

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + k + \frac{1}{10} = 1$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + k = 1$$

$$k = 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

b) $\text{Impar} = \{1, 3, 5\}$

$$P(\text{Impar}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

9. Juan y Pedro se entrenan lanzando tiros a una canasta de baloncesto desde un mismo punto. De 40 tiros, Juan ha fallado 18, y Pedro, de 50 tiros, ha enceestado 28.

- a) ¿Qué porcentaje de aciertos ha obtenido Juan?
- b) ¿Cuál de los dos es mejor encestador? Justifica la respuesta.

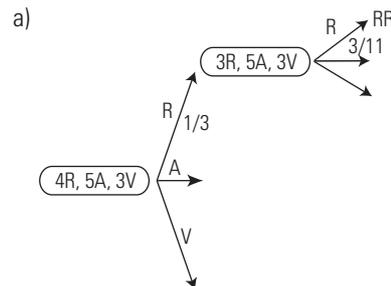
a) Juan ha acertado $\frac{22}{40} = 0,55 = 55\%$

b) Pedro ha enceestado $\frac{28}{50} = 0,56 = 56\%$. Los dos son muy

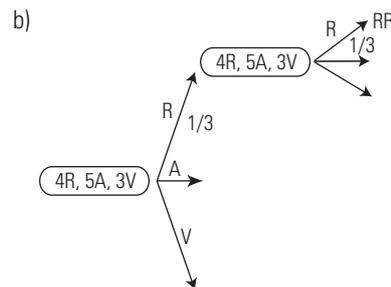
similares. Pedro tiene una probabilidad de enceste de una centésima mayor que Juan.

10. En una bolsa hay 4 bolas rojas, 5 azules y 3 verdes. Se extraen dos bolas. Calcula la probabilidad de que salgan dos bolas rojas:

- a) Al extraerlas sin devolución.
- b) Al extraerlas con devolución.



$$P(RR) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{11} = \frac{3}{33} = \frac{1}{11}$$



$$P(RR) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

11. En el colegio de Irene, su profesora de ciencias les hace exámenes que se puntúan de 0 a 100. Irene tiene una media de 60 puntos de sus primeros cuatro exámenes de ciencias. En el quinto examen sacó 80 pun-

tos. **¿Cuál es la media de las notas de Irene en ciencias tras los cinco exámenes?**

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 las notas de los cuatro exámenes primeros.

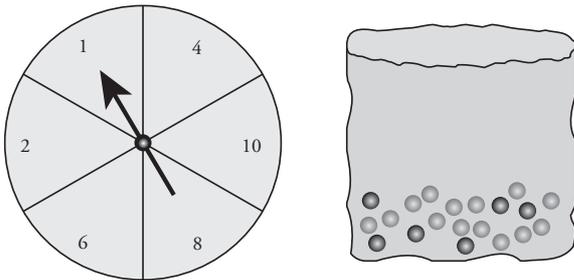
La media de ellos es:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = 60 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \cdot 60 = 240$$

La media de los cinco exámenes será:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = \frac{240 + 80}{5} = \frac{320}{5} = 64$$

12. En un juego de una caseta de feria se utiliza en primer lugar una ruleta. Si la ruleta se para en un número par, entonces el jugador puede sacar una canica de una bolsa. La ruleta y las canicas de la bolsa se representan en los dibujos siguientes



Cuando se saca una canica negra se gana un premio. Daniela juega una vez.

¿Cómo es de probable que Daniela gane un premio?

- a) Es imposible.
- b) No es muy probable.
- c) Tiene aproximadamente el 50% de probabilidad.
- d) Es muy probable.
- e) Es seguro.

No es muy probable.

13. Se emitió un documental sobre terremotos y la frecuencia con que estos ocurren. El documental incluía un debate sobre la posibilidad de predecir los terremotos.

Un geólogo dijo:

En los próximos veinte años, la posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Zed es dos de tres.

¿Cuál de las siguientes opciones refleja mejor el significado de la afirmación del geólogo?

- a) $\frac{2}{3} \cdot 20 = 13,3$ por lo que entre 13 y 14 años a partir de ahora habrá un terremoto en la Ciudad de Zed.
- b) $\frac{2}{3}$ es más que $\frac{1}{2}$, por lo que se puede estar seguro de que habrá un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años.
- c) La probabilidad de que haya un terremoto en la Ciudad de Zed en algún momento en los próximos 20 años es mayor que la probabilidad de que no haya ningún terremoto.
- d) No se puede decir lo que sucederá, porque nadie puede estar seguro de cuándo tendrá lugar un terremoto.

La c)

